

# 1

## Physikalische Grundlagen

In diesem ersten Kapitel behandeln wir ausgewählte Themen aus der Physik, die für die Astrophysik von besonderer Bedeutung sind. Abweichend von den Folgekapiteln wird hier eine eher knappe Darstellung gewählt und die Tatsache ausgenutzt, dass ausführlichere Einführungen in diese Themen anderswo vielfach verfügbar sind. Wir setzen hier also eine gewisse grundsätzliche Vertrautheit mit dem Stoff voraus; die Behandlung in diesem Buch dient vor allem der Rekapitulation und der Fokussierung auf astrophysikalisch relevante Aspekte. Für die Lehre ist es daher auch nicht unbedingt ratsam, dieses Kapitel als eigenständiges Kurselement einzusetzen. Aus diesem Grund verzichten wir hier auch auf eigene Übungsaufgaben. Das Kapitel ist eher eine Art Sammlung, auf die an anderen Stellen bei Bedarf zurückgegriffen wird; das schließt auch einige Übungsaufgaben ein.

### 1.1 Gravitation

#### 1.1.1 Das Newtonsche Gravitationsgesetz

Die Gravitationskraft ist eine der vier Grundkräfte der Natur. Sie wird ausgedrückt durch das *Newtonsche Gravitationsgesetz* für die Anziehungskraft  $F_G$  zwischen zwei Punktmassen  $m_1$  und  $m_2$  im Abstand  $r$  voneinander. Betragsmäßig ist

$$F_G = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}, \quad (1.1)$$

mit  $G$  als der universellen Gravitationskonstante. Die Gravitationskraft zeigt immer in Richtung des Massenpunkts, der die Kraft ausübt. Da die Kraftwirkung zweier Massen aufeinander symmetrisch ist (3. Newtonsches Axiom: „*actio = reactio*“), wird  $m_1$  ebenso durch  $m_2$  angezogen wie umgekehrt  $m_2$  durch  $m_1$ . Der Betrag von  $F_G$  fällt mit  $\propto r^{-2}$  ab, die Kraft reicht formal „bis ins Unendliche“. Die Gravitationswirkung eines Körpers oder Massenelements auf einen anderen lässt sich daher nicht abschirmen; allerdings kann seine Wirkung gegenüber dem Einfluss größerer oder näher gelegener Massen vernachlässigbar klein werden.

Daher gilt die obige Form des Gravitationsgesetzes nur in der Idealisierung zweier perfekt isolierter Punktmassen. Für Systeme mit mehr als zwei Massenpunkten bzw. für ausgedehnte Körper lässt sich aber die Gesamt-Massenverteilung zerlegen in  $n$

einzelne Punktmassen  $m_i$ , deren Kräfte sich vektoriell addieren zu einer netto wirkenden Gravitationskraft. Die Kraft auf die Masse  $m_i$  am Ort  $\mathbf{r}_i$  ist dann

$$\mathbf{F}_{G,i} = \sum_{j \neq i}^n G m_i m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (1.2)$$

Die rechnerische Behandlung solcher  $n$ -Körper-Systeme ist konzeptionell einfach, kann in der Praxis aber sehr aufwendig werden, insbesondere wenn  $n$  groß ist oder wenn sehr lange Zeiträume betrachtet werden sollen. Obwohl es im realen Universum natürlich keine echten Massenpunkte gibt, lassen sich glücklicherweise in vielen Fällen die Himmelskörper in sehr guter Näherung als Quasi-Punktmassen auffassen. Die Grundlage dafür bildet das Newtonsche Schalentheorem, demzufolge die Gravitationswirkung eines sphärisch symmetrischen Körpers der Gesamtmasse  $M$  außerhalb des Körpers gleich ist der Wirkung einer im Mittelpunkt des Körpers gedachten gleich großen Punktmasse.<sup>1</sup> Darüber hinaus kann bei hinreichend großer Entfernung jeder Körper angenähert als Punktmasse betrachtet werden, unabhängig von dessen genauer Gestalt und Massenverteilung.

Das Gravitationsgesetz lässt sich als Differentialgleichung für die Bewegung der beteiligten Körper auffassen, indem man nach dem zweiten Newtonschen Axiom die Kraft durch das Produkt aus Masse und Beschleunigung ersetzt. Die vektoriellen Bewegungsgleichungen für ein System aus zwei Punktmassen lauten

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = G m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad \text{und} \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \ddot{\mathbf{r}}_1. \quad (1.3)$$

Die Lösung der Bewegungsgleichung eines Körpers ergibt dessen Bahnkurve  $\mathbf{r}(t)$  im Gravitationsfeld. Je nach den Beträgen und der Anordnung der beteiligten Massen können solche Bahnkurven sehr unterschiedlich ausfallen.

Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie besagt, dass die Newtonsche Formulierung des Gravitationsgesetzes, die alle Beschreibungen auf einen dreidimensionalen euklidischen Raum bezieht, streng genommen nur im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten und schwacher Gravitationsfelder gültig ist. Allerdings sind die Abweichungen häufig so gering, dass das Newtonsche Kraftgesetz in sehr guter Näherung als Grundlage für die Berechnung der Bewegung der meisten Himmelskörper dienen kann.

### 1.1.2 Zentralmassen- und Zweikörperproblem

Sehr oft lässt sich das Problem der Bahnbewegung von Körpern im Gravitationsfeld näherungsweise reduzieren auf den einfachen Fall einer dominierenden Zentralmasse  $M$ , die von einer sehr viel kleineren Masse  $m \ll M$  umlaufen wird, wobei dann die Gravitationswirkung von  $m$  auf  $M$  vernachlässigt wird. Das ist etwa bei der Bewegung der Planeten um die Sonne oder beim Umlauf künstlicher Satelliten um die Erde gegeben – wobei natürlich die vernachlässigten Effekte nicht völlig verschwinden und bei hinreichend genauen Messungen auch beobachtbar werden.

Es lässt sich leicht zeigen, z.B. durch die Forderung nach Gleichgewicht zwischen Gravitations- und Zentrifugalkraft, dass eine kreisförmige Bahnkurve um das Zentrum eine

<sup>1</sup> Der zweite Teil dieses Theorems besagt zusätzlich, dass die Netto-Gravitationswirkung im Inneren einer sphärisch symmetrischen Kugelschale an allen Punkten verschwindet. Dieser Sachverhalt ist von großer Bedeutung für diverse astrophysikalische Problemstellungen.

gültige Lösung der Bewegungsgleichung (1.3) für diesen Fall darstellt. Die *Kreisbahngeschwindigkeit*  $v_K$  im Abstand  $r$  von der Zentralmasse ergibt sich zu

$$v_K = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (1.4)$$

Die Bedeutung dieser einfachen Beziehung kann man eigentlich kaum hoch genug einstufen, und zwar für die gesamte Astrophysik. Insbesondere zeigt sie, wie die Masse  $M = rv_K^2/G$  eines Objekts durch Messung von Bahnradius und Bahngeschwindigkeit eines das Objekt umlaufenden Körpers bestimmt werden kann. Das ist für sehr viele astrophysikalische Situationen relevant, da die jeweilige Masse die grundlegende physikalische Größe darstellt. Oft lässt sich Gl. (1.4) näherungsweise verwenden, auch wenn gar keine Kreisbahnbewegung vorliegt, sondern die Messgrößen  $v$  und  $r$  nur ungefähre Mittelwerte darstellen. Dann liefert  $rv_K^2/G$  immerhin noch einen Schätzwert der Masse, der zumindest die korrekte Größenordnung angibt.

Manchmal wird statt der Bahngeschwindigkeit  $v$  die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  angegeben, bei periodischen Bewegungen auch *Kreisfrequenz* genannt. Für eine Kreisbahn im Gravitationsfeld einer Zentralmasse ist

$$\omega_K = \frac{2\pi}{U} = \frac{v_K}{r} = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \quad (1.5)$$

mit  $U$  als der Umlaufzeit des Körpers.

Die Kreisbahn stellt eine spezielle Lösung des Zentralmassenproblems dar. Allgemeiner lässt sich zeigen, dass sich die möglichen Bahnkurven um eine Zentralmasse alle als Kegelschnitte ausdrücken lassen, d.h. als Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln. Dabei beschreiben die Ellipsenbahnen *gravitativ gebundene* Systeme mit streng periodischen Bahnen um das Zentralobjekt, wogegen Hyperbel- und Parabelbahnen die Bewegung von sich nur einmalig begegnenden Körpern wiedergeben. Speziell für Ellipsenbahnen gelten die *Keplerschen Gesetze*, aufgestellt zur Beschreibung der Planetenbahnen im Sonnensystem (s. Abschn. 3.2.1).

Die Annahme einer dominierenden Zentralmasse ist oft, aber bei weitem nicht immer gerechtfertigt – z.B. gilt sie nicht in Doppelsternsystemen mit zwei Sternen ähnlicher Masse, und auch nicht bei einer Betrachtung der kleinen, aber messbaren Rückwirkung eines Planeten auf seinen Zentralstern (s. Abschn. 8.1.4). Eigentlich ist die Vereinfachung auch nicht wirklich notwendig, denn die Behandlung des klassischen *Zweikörperproblems* ist kaum komplizierter als das reine Zentralmassenproblem. An die Stelle des Umlaufs des einen Körpers um den anderen treten Bewegungen beider Körper um den gemeinsamen Schwerpunkt. Dieser ist definiert als der Punkt auf der Verbindungslinie, für den  $r_1/r_2 = m_2/m_1$  gilt (mit  $r_1$  und  $r_2 = r - r_1$  als die jeweiligen Abstände der Massen  $m_1$  und  $m_2$  zum Schwerpunkt). Es ergeben sich wiederum Kegelschnitte als Bahnen, sowohl um den Schwerpunkt als auch für die Relativbewegung beider Körper umeinander, wobei die Masse in der Bewegungsgleichung durch eine „reduzierte Masse“  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  zu ersetzen ist. Im Grenzfall  $m_1 \ll m_2$  gilt natürlich  $\mu \approx m_1$ .

Die Bahnformen im Zentralmassenproblem hängen von zwei fundamentalen physikalischen Größen ab, nämlich von der Gesamtenergie  $E_{\text{ges}}$  des Körpers in Bezug auf die Zentralmasse und von seinem (vektoriellen) Bahndrehimpuls  $L_{\text{Bahn}}$ .

Die Gesamtenergie ist definiert als die Summe von kinetischer Energie  $E_{\text{kin}} = mv^2/2$  und potentieller Energie  $E_{\text{pot}} = -GmM/r$ .  $E_{\text{ges}}$  ist eine Erhaltungsgröße, während  $E_{\text{kin}}$  und  $E_{\text{pot}}$  sich über den Bahnverlauf und als Funktion der Zeit ändern können. Es gilt also

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{kin}}(t) + E_{\text{pot}}(t) = \text{const.} \quad (1.6)$$

Die Gesamtenergie ergibt sich dabei mathematisch als erstes Integral der Bewegungsgleichung, wobei eine Integrationskonstante auftritt, die durch eine entsprechende Anfangs- oder Randbedingung festgelegt werden muss. Oft wird diese so gewählt, dass die potentielle Energie des Körpers für  $r \rightarrow \infty$  gegen Null strebt.

Im Spezialfall einer Kreisbahn um eine Zentralmasse sind sowohl die potentielle als auch die kinetische Energie zeitlich konstant. Unter Verwendung von Gl. (1.4) erhalten wir

$$\begin{aligned} E_{\text{pot,K}} &= -\frac{GMm}{r} \\ E_{\text{kin,K}} &= \frac{1}{2} m v_K^2 = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r} = -\frac{1}{2} E_{\text{pot,K}} = -E_{\text{ges}}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

was den *Virialsatz* für diesen Spezialfall ausdrückt. Allgemein gilt der Virialsatz für *alle* gravitativ gebundenen Systeme, allerdings nur im zeitlichen Mittel.

Der Bahndrehimpuls in Bezug auf die Zentralmasse, definiert als das vektorielle Kreuzprodukt aus Orts- und Geschwindigkeitsvektor multipliziert mit der Masse des Körpers, ist ebenfalls eine Erhaltungsgröße,

$$\mathbf{L}_{\text{Bahn}} = m \mathbf{v} \times \mathbf{r} = m r^2 \boldsymbol{\omega} = \text{const.}, \quad (1.8)$$

mit der vektoriellen Winkelgeschwindigkeit für eine ebene Bahn  $\boldsymbol{\omega} = (\mathbf{v} \times \mathbf{r})/r^2$ .

Die beiden Erhaltungsgrößen  $E_{\text{ges}}$  und  $\mathbf{L}_{\text{Bahn}}$  legen die Bahnkurve in einer Ebene fest. Größe und Form einer Kegelschnittbahn lassen sich durch zwei Parameter  $a$  und  $\epsilon$  vollständig beschreiben.  $a$  ist die *große Halbachse*,  $\epsilon$  ist die *Exzentrizität* der Bahn, wobei für eine Ellipsenbahn  $\epsilon < 1$  (mit dem Grenzfall  $\epsilon = 0$  für einen Kreis) und für eine Hyperbelbahn  $\epsilon > 1$  gilt;  $\epsilon = 1$  bezeichnet eine Parabelbahn. Für eine Ellipsenbahn ist gleichwertig zu  $\epsilon$  auch die Angabe der *kleinen Halbachse*  $b = a \sqrt{1 - \epsilon^2}$  möglich. Weitere Bahnparameter geben die Orientierung der Bahn im Raum an. Wegen der Konstanz von  $\mathbf{L}_{\text{Bahn}}$  folgt aus der Bewegungsgleichung, dass der Drehimpulsvektor senkrecht zur Bahnebene stehen muss.

Die große Halbachse der Bahn hängt nur von der spezifischen Gesamtenergie ab und beträgt

$$a = \frac{GM}{-2(E_{\text{ges}}/m)}, \quad (1.9)$$

wogegen die Bahnform sowohl durch den Betrag des spezifischen Drehimpulses  $L_{\text{Bahn}}/m$  als auch von Vorzeichen und Betrag der Gesamtenergie bestimmt wird. Die Exzentrizität der Bahn ist dann

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2(L_{\text{Bahn}}/m)^2 (E_{\text{ges}}/m)}{(GM)^2}}. \quad (1.10)$$

Eine negative Gesamtenergie ergibt eine Exzentrizität von  $\epsilon < 1$ , also eine geschlossene Ellipsenbahn. Bei festem  $L_{\text{Bahn}}$  ist  $\epsilon$  um so kleiner, je kleiner (d.h. vom Betrag her größer) die Gesamtenergie ist. Wenn die Kombination aus  $E_{\text{ges}}$  und  $L_{\text{Bahn}}$  gerade  $\epsilon = 0$  ergibt, wird die Bahn zu einem Kreis. Noch kleinere Werte von  $E_{\text{ges}}$  oder größere Werte von  $L_{\text{Bahn}}$  führen zu einem negativen Term unter der Wurzel und entsprechen keiner stabilen Bahn. Eine Kreisbahn repräsentiert somit die Lösung für die minimale Gesamtenergie eines gravitativ gebundenen Systems bei gegebenem Drehimpuls, bzw. für den maximalen Drehimpuls bei gegebener Gesamtenergie.

Die Bahnperiode (Umlaufzeit  $U$ ) auf einer Ellipsenbahn hängt nur von  $a$  ab, also nur von der Gesamtenergie; sie beträgt

$$U = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{GM}{\sqrt{-E^3}} = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{GM}}, \quad (1.11)$$

was genau das 3. Keplersche Gesetz wiedergibt.

### 1.1.3 Gravitationspotential

In der Zentralmassenäherung  $m \ll M$  hängt die Bahnkurve eines Körpers nicht von seiner eigenen Masse ab. Zwar taucht  $m$  in den Beziehungen explizit auf, ist aber auch in  $E_{\text{kin}}$ ,  $E_{\text{pot}}$  und  $L_{\text{Bahn}}$  enthalten und kann somit eigentlich herausgekürzt werden. Diese Tatsache haben wir in Gl. (1.9) und (1.10) schon durch eine entsprechende Schreibweise angedeutet.

Allgemein lässt sich die potentielle Energie durch ein ortsabhängiges *Gravitationspotential*  $\Phi(\mathbf{r})$  ausdrücken. Für das einfache Zentralmassenproblem lautet dieses

$$\Phi(r) = \frac{E_{\text{pot}}}{m} = -\frac{GM}{r} \quad (1.12)$$

Offensichtlich hat  $\Phi$  die Dimension eines Geschwindigkeitsquadrats und ist hier (bis auf das Vorzeichen) identisch mit dem quadrierten Ausdruck für die Kreisbahngeschwindigkeit im Abstand  $r$  zum Massenzentrum (Gl. 1.4). Der Wert von  $v_K = \sqrt{|\Phi|}$  gibt also unmittelbar die „Tiefe“ des Gravitationspotentials am Ort  $r$  an.

Für ein gegebenes Potential kann die vektorielle Bewegungsgleichung kompakt dargestellt werden als

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla\Phi(\mathbf{r}), \quad (1.13)$$

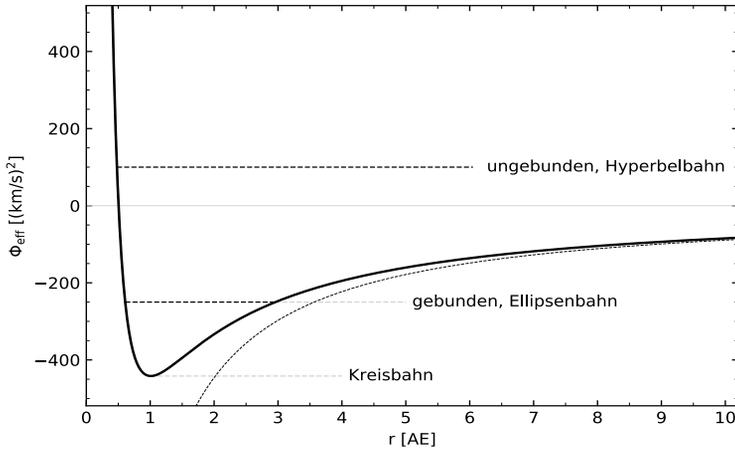
unabhängig von der genauen Form des Potentials. Diese Gleichung gilt auch für komplexere gravitative Systeme, die aus mehreren Körpern oder einer ausgedehnten Massenverteilung bestehen (s. Abschn. 1.1.4 und 1.1.5). Man spricht auch von einem *Gravitationsfeld*, das durch das Potential quantitativ beschrieben wird.

Die Bahnkurve eines konkreten Körpers um eine Zentralmasse hängt ab von seiner Gesamtenergie und von seinem Drehimpuls. Diese Abhängigkeiten lassen sich übersichtlich zusammenfassen durch ein *effektives Potential*  $\Phi_{\text{eff}}$ , das im Zentralmassenproblem definiert werden kann als

$$\Phi_{\text{eff}}(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{(L_{\text{Bahn}}/m)^2}{2r^2}. \quad (1.14)$$

Wendet man Gl. (1.13) auf das effektive Potential an, so erhält man die netto resultierende Beschleunigung eines Körpers im Gravitationsfeld *einschließlich* der Zentrifugalbeschleunigung. Das effektive Potential beschreibt also die Kräfte in einem mit der Bahnbewegung des Körpers mitrotierenden Bezugssystem.

Für große Radien ( $r \rightarrow \infty$ ) wird der zweite Term in Gl. (1.14) rechts sehr klein, d.h. der Einfluss des Bahndrehimpulses kann vernachlässigt werden; für  $r \rightarrow 0$  dominiert dieser Term hingegen. Dazwischen hat  $\Phi_{\text{eff}}$  ein Minimum an einem Punkt  $r_K$ , den wir identifizieren können mit dem schon in Abschn. 1.1.2 erwähnten Minimalenergie-Bahnradius einer Kreisbahn. Der Verlauf von  $\Phi_{\text{eff}}(r)$  ist in Abb. 1.1 beispielhaft für ein Objekt mit dem Bahndrehimpuls der Erde im Sonnensystem dargestellt.



**Abb. 1.1.** Verlauf des effektiven Potentials um eine Zentralmasse für ein Objekt mit dem Bahndrehimpuls der Erde im Sonnensystem. Zum Vergleich ist auch das statische Gravitationspotential  $\Phi = -GM/r$  gezeigt. Die horizontalen gestrichelten Linien repräsentieren verschiedene Werte der Gesamtenergie.

Über das effektive Potential lässt sich anschaulich erkennen, dass sich ein Objekt mit einem Drehimpuls  $L_{\text{Bahn}} \neq 0$  nicht beliebig an die Zentralmasse annähern kann. Für  $r < r_K$  wird der Gradient von  $\Phi_{\text{eff}}(r)$  negativ, die Nettobeschleunigung zeigt dann also nach außen. Dieser als *Drehimpulsbarriere* bezeichnete Effekt ist in der Astrophysik von sehr großer Bedeutung, weil er verhindert, dass Materie aus der Umgebung „einfach so“ von der Zentralmasse aufgenommen werden kann. Es bedarf spezieller Mechanismen, um Drehimpuls aus der einfallenden Materie abzuführen und dadurch einen Materiestrom auf das Zentralobjekt zu ermöglichen. Dieser Vorgang ist in der Astrophysik als *Akkretion* bekannt und spielt eine Rolle z.B. bei der Stern- und Planetenentstehung (s. Abschn. 7.1.3), beim Massentransfer zwischen den Komponenten in engen Doppelsternsystemen (s. Abschn. 7.4.3) sowie beim Wachstum massereicher Schwarzer Löcher in Galaxien (s. Abschn. 11.5.4).

Der genaue Verlauf von  $\Phi_{\text{eff}}(r)$  und die Lage des Minimums hängen nur von der Zentralmasse  $M$  und vom Drehimpuls  $L_{\text{Bahn}}$  ab. Die Gesamtenergie eines Körpers am Ort  $r$  ist dann gegeben durch  $E_{\text{ges}}/m = \Phi_{\text{eff}} + \dot{r}^2/2$ , also dem effektiven Potential plus der kinetischen Energie in radialer Richtung. Zeichnet man in Abb. 1.1 eine horizontale Linie bei einem beliebig gewählten Wert von  $E_{\text{ges}}/m$  ein, so ergeben die Schnittpunkte mit der Kurve für  $\Phi_{\text{eff}}(r)$  bereits wesentliche Charakteristika der Bahn. Für  $E_{\text{ges}} < E_{\text{min}}$  existiert keine stabile Bahn. Ist  $E_{\text{ges}}$  negativ, aber größer als die Minimalenergie, dann oszilliert der Körper auf einer Ellipsenbahn zwischen den Schnittpunkten. Ist  $E_{\text{ges}}$  hingegen positiv, so gibt es nur einen inneren Schnittpunkt, der Körper ist gravitativ ungebunden und bewegt sich auf einer offenen Hyperbelbahn. Er kann sich zwar bis auf einen Minimalabstand annähern, wird dort aber stark nach außen beschleunigt und verlässt das System wieder mit  $r \rightarrow \infty$ .

Ein zuvor gebundener Körper kann das Potential ebenfalls verlassen, wenn er auf mindestens die Grenz- oder *Entweichgeschwindigkeit*

$$v_E = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{2} v_K \quad (1.15)$$

beschleunigt wird, z.B. durch den Rückstoß einer Rakete oder durch Übertrag kinetischer Energie in einer Mehrkörper-Wechselwirkung. Das Verhältnis der Bahn- zur Entweichgeschwindigkeit ist entscheidend für die Stärke der Bindung eines Körpers an ein gravitatives System; sie bestimmt beispielsweise, welche Gase durch die Gravitation an der Oberfläche eines Planeten gehalten werden können und welche nicht (s. Abschn. 3.3.3), oder ob durch einen galaktischen Wind beschleunigtes Gas in das intergalaktische Medium entkommen kann (s. Abschn. 12.4.2).

#### 1.1.4 Drei- und Mehrkörpersysteme

Die Newtonschen Bewegungsgleichungen werden bereits bei drei miteinander gravitativ wechselwirkenden Körper nichtlinear, lassen sich dann also nicht mehr analytisch lösen und auch nicht durch eine konvergierende Näherungslösung darstellen. Vielmehr wird das Verhalten eines solchen Systems zumindest auf lange Sicht unvorhersagbar, da kleine Änderungen in den Anfangsbedingungen zu völlig anderen Langzeitentwicklungen führen können. Es gibt zwar einige im mathematischen Sinne stabile Konfigurationen, z.B. drei sich gegenseitig auf einer einzigen Bahnkurve von der Form einer „8“ umlaufende Körper; allerdings werden solche Systeme bereits durch winzige Störungen aus dem Gleichgewicht geworfen. Für diese Kategorie von Systemen hat sich auch der Begriff „deterministisches Chaos“ eingebürgert.

Offensichtlich verhalten sich aber in der Realität nicht alle Mehrkörpersysteme komplett chaotisch, wie schon das seit fast 5 Milliarden Jahren bestehende Sonnensystem zeigt. Je nach Massen und relativen Abständen der beteiligten Körper lassen sich insbesondere im Dreikörperproblem deutlich einfachere Beschreibungen finden, die dann auch zu einer langfristigen Quasi-Stabilität führen können. Wir unterscheiden hier drei solche Grenzfälle:

Im ersten Fall gilt  $m_1 \gg m_2 \gg m_3$ , also eine mehrstufige Massenhierarchie gekoppelt an eine entsprechende Hierarchie der Abstände. Ein gutes Beispiel ist der Umlauf von künstlichen Satelliten um die Erde auf erdnahen Bahnen, während die Erde wiederum die Sonne umläuft (s. Abschn. 4.1.3). Eine solche Entkopplung von gravitativ gebundenen Systemen sehr verschiedener Dimensionen und Massen ist im Universum vielfach zu finden.

Eine zweite Form des vereinfachten Dreikörperproblems ist für  $m_1 \gg m_2 \approx m_3$  anwendbar; es gilt näherungsweise ein Zentralmassenproblem, und die Bahnen von  $m_2$  und  $m_3$  lassen sich nahezu unabhängig voneinander berechnen, etwa bei den Planeten im Sonnensystem. Nur wenn sich  $m_2$  und  $m_3$  nahe kommen, beeinflusst ihre gegenseitige Anziehungskraft die jeweiligen Bahnen. Solange dieser Einfluss hinreichend klein ist, kann die Veränderung der Bahnen mittels linearer Störungstheorie berechnet werden. Ein berühmtes Beispiel aus der Astronomiegeschichte für diesen Fall stellt die Entdeckung des Planeten Neptun dar (s. Abschn. 3.2.4). Unter gewissen Umständen lassen sich sogar analytische Lösungen für die gestörten Bahnen finden, die dann allerdings keine geschlossenen Ellipsen mehr darstellen, sondern offene Rosettenbahnen. Ein ähnliches Verhalten zeigen die Bahnen von Sternen im ausgedehnten Potential einer Galaxie (s. Abschn. 10.5.5 und 11.4.3).

Im dritten Fall ist  $m_1 \approx m_2 \gg m_3$ , d.h. eine der drei beteiligten Massen ist deutlich kleiner als die beiden anderen; dies stellt das klassische „eingeschränkte Dreikörperproblem“ dar. Dann ist das Gravitationspotential unabhängig von der Position des Probeteilchens  $m_3$ , und die auf das Teilchen wirkende Kraft ist

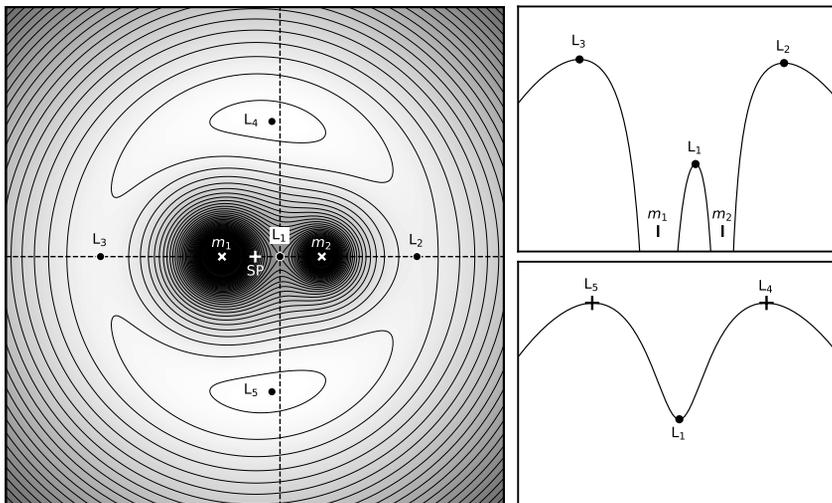
$$\mathbf{F}_G = -G m_3 \left( m_1 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} - m_2 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^3} \right). \quad (1.16)$$

Im Gleichgewicht bewegen sich die Körper 1 und 2 auf stabilen Bahnen um den gemeinsamen Schwerpunkt. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass es sich dabei um Kreisbahnen handelt; dann ist die Kreisfrequenz des Umlaufs  $\omega_K = 2\pi/U = \sqrt{G(m_1 + m_2)/r^3}$  (mit  $U$  als Umlaufzeit). Betrachten wir nun ein mit  $\omega_K$  mitrotierendes Koordinatensystem, dessen Ursprung im Schwerpunkt des Systems liegt: In diesem Bezugssystem sind die Ortsvektoren der Massen 1 und 2 fest, das Gravitationsfeld ist also eine reine Funktion des Orts und hängt nicht mehr von der Zeit ab. Allerdings muss zusätzlich zur Gravitation noch die Zentrifugalbeschleunigung aufgrund der Rotation des Systems berücksichtigt werden. Dazu stellen wir wieder ein „effektives Potential“ auf, wobei im Unterschied zu Gl. (1.14) hier nicht der Drehimpuls des Probeteilchens vorgegeben ist, sondern die Rotationsfrequenz  $\omega_K$  des Bezugssystems. Der entsprechende Ausdruck lautet dann

$$\Phi_{\text{eff}} = -\frac{G m_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|} - \frac{G m_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|} - \frac{1}{2} \omega_K^2 s^2, \quad (1.17)$$

mit  $s$  als dem Abstand des Teilchens von der Rotationsachse. Dieses Konzept wird auch *Roche-Potential* genannt (nach E. Roche um 1850). Abb. 1.2 zeigt eine Beispielkonfiguration mit  $m_1/m_2 = 2$ .

Der Verlauf von  $\Phi_{\text{eff}}$  für eine solche Konstellation ist deutlich komplizierter als im Zweikörperproblem. An insgesamt fünf Orten, bekannt als *Lagrange-Punkte*  $L_1$ – $L_5$ , ist der Gradient des effektiven Potentials gleich Null. Ein Teilchen, das sich in einem dieser Punkte befindet, ist daher im rotierenden Bezugssystem kräftefrei und könnte sich im Prinzip dort



**Abb. 1.2.** Effektives oder Roche-Potential in einem Mehrkörpersystem mit zwei um den gemeinsamen Schwerpunkt rotierenden Massen mit  $m_1/m_2 = 2$ . Gleiche Werte des Potentials sind durch Grauwerte angedeutet und mit Konturlinien verbunden.  $L_1$ – $L_5$  sind die Lagrange-Punkte, SP der Schwerpunkt des Systems. Die Diagramme rechts zeigen Schnitte entlang der beiden gestrichelten Linien.

dauerhaft aufhalten. Bei externer Beobachtung würde das Teilchen das System dann auf einer Kreisbahn mit der Frequenz  $\omega_K$  umlaufen, also an einer festen Position relativ zu den beiden Massen. Die Frage nach der Stabilität solcher Umlaufbahnen ist allerdings durchaus kompliziert,<sup>2</sup> aber das übergehen wir hier und halten fest, dass die Lagrange-Punkte die möglichen Bahnen im eingeschränkten Dreikörperproblem aufspannen. Zusätzlich sind auch noch Bahnen in so großen Abständen möglich, dass das System von  $m_1$  und  $m_2$  durch eine einzelne Punktmasse approximiert werden kann; solche Bahnen haben dann aber natürlich sehr viel längere Umlaufzeiten.

Konfigurationen wie in Abb. 1.2 skizziert kommen in astrophysikalischen Systemen sehr häufig vor, und wir werden an die obigen Überlegungen mehrmals anknüpfen. Beispielsweise sind die Lagrangepunkte  $L_1$  und  $L_2$  des Systems Erde-Sonne besonders attraktive Orte für die Positionierung von Satellitenobservatorien (s. Abschn. 4.5.2). Im System Jupiter-Sonne halten sich bei  $L_4$  und  $L_5$  ganze Gruppen von Asteroiden auf, die *Trojaner* (s. Abschn. 3.5.2). Und in engen Doppelsternsystemen kann es dazu kommen, dass Materie von einem Stern zum anderen durch den inneren Lagrangepunkt  $L_1$  überfließt (s. Abschn. 7.4.3).

Systeme mit vielen Teilchen vergleichbarer Massen, die gemeinsam für das resultierende Gravitationsfeld verantwortlich sind, lassen sich im allgemeinen nur noch durch numerische Computersimulationen untersuchen oder statistisch beschreiben. Bei letzterem Vorgehen verzichtet man darauf, das Verhalten einzelner Teilchen zu erfassen und konstruiert statt dessen makroskopische Größen, um das mittlere Verhalten eines Teilchenensembles zu charakterisieren. In mancher Hinsicht ähnelt dieser Ansatz der Methodik der kinetischen Gastheorie (s. Abschn. 1.2), allerdings mit einigen Besonderheiten für gravitative Systeme. Für abgeschlossene Systeme und in Abwesenheit dissipativer Prozesse gelten weiterhin die üblichen Erhaltungssätze von Gesamtenergie, Impuls und Drehimpuls. Von sehr großer Bedeutung für Vielteilchensysteme ist der *Virialsatz*,

$$2 \langle E_{\text{kin}} \rangle = - \langle E_{\text{pot}} \rangle \quad (1.18)$$

(s. Gl. 1.7), wobei die spitzen Klammern andeuten sollen, dass Mittelwerte dieser Größen gemeint sind, entweder über viele Teilchen des Ensembles oder über die Zeit. Der Virialsatz ist in astrophysikalischen Gleichgewichtssituationen oft in guter Näherung erfüllt und stellt eine sehr allgemeine Verbindung her zwischen dem Gravitationsfeld des Gesamtsystems und den Bewegungen der Einzelteilchen.

### 1.1.5 Ausgedehnte Massenverteilungen

Reale astrophysikalische Objekte lassen sich oftmals besser durch kontinuierliche Dichteverteilungen  $\varrho(\mathbf{r})$  darstellen anstatt als Systeme aus vielen Einzelteilchen. Das ist insbesondere dann angemessen, wenn die Wechselwirkungen der Einzelteilchen untereinander schwach sind im Vergleich zu den global wirkenden Kräften. Ganz allgemein wird

<sup>2</sup>  $L_1$ ,  $L_2$  und  $L_3$  sind Sattelpunkte in  $\Phi_{\text{eff}}$ ,  $L_4$  und  $L_5$  markieren sogar Maxima; d.h. Bahnen in genau diesen Punkten sind zwar mathematisch möglich, aber formal nicht stabil gegen kleine Störungen. Das Roche-Potential gilt jedoch nur für Objekte, die sich im mitrotierenden Bezugssystem in Ruhe befinden, andernfalls wirken zusätzlich noch Corioliskräfte. Berücksichtigt man diese, so erweisen sich  $L_4$  und  $L_5$  als stabil.  $L_1$ – $L_3$  sind zwar als Punkte instabil, Körper können aber auf sogenannten Librationsbahnen die jeweiligen Punkte quasi-periodisch umlaufen.

der Zusammenhang zwischen Dichteverteilung und Potential durch die Poissongleichung ausgedrückt,

$$4\pi G \varrho(\mathbf{r}) = \Delta\Phi(\mathbf{r}), \quad (1.19)$$

wobei das Symbol  $\Delta$  hier den Laplace-Operator repräsentiert, also die Divergenz des Gradienten von  $\Phi$ . Formal besagt diese Gleichung, dass sich  $\varrho$  vollständig aus einem gegebenen  $\Phi$  berechnen lässt. In der Praxis ist aber oft die umgekehrte Richtung gefordert; dann stellt Gl. (1.19) eine Differentialgleichung für  $\Phi$  dar, die durch Integration der Dichteverteilung  $\varrho(\mathbf{r})$  nach Spezifikation angemessener Randbedingungen gelöst werden muss.

Es gibt zwar einige spezielle Dichteverteilungen, für die das zugehörige Potential ebenfalls als eine geschlossene Funktion geschrieben werden kann, aber im allgemeinen ist die Korrespondenz zwischen Dichte und Potential nur numerisch auswertbar. Für kugelsymmetrische Objekte gilt immerhin das Newtonsche Schalentheorem (s. Abschn. 1.1.1), aus dem unmittelbar folgt, dass die entsprechenden Potentiale dann auch kugelsymmetrisch sein müssen. In einem solchen Gravitationsfeld ist die bei  $r' < r$  eingeschlossene Masse eine hilfreiche Größe,

$$M_r \equiv 4\pi \int_0^r \varrho(r') r'^2 dr'. \quad (1.20)$$

Die Bewegungsgleichung lautet dann einfach  $\ddot{r} = -GM_r/r^2$ , was wiederum als spezielle Lösung für minimale Gesamtenergie bzw. maximalen Bahndrehimpuls eine Kreisbahn ergibt. Die zugehörige Bahngeschwindigkeit beträgt

$$v_K(r) = \sqrt{\frac{GM_r}{r}}, \quad (1.21)$$

also formal genau wie in Gl. (1.4), nur mit der radiusabhängigen Masse  $M_r$  anstelle einer festen Zentralmasse. Um den Verlauf von  $v_K(r)$  angeben zu können, oder zur Beschreibung anderer Bahnformen, muss man natürlich noch das radiale Dichtegesetz  $\varrho(r)$  konkretisieren.

Eine für die Astrophysik wichtige Klasse von kugelsymmetrischen Massenverteilungen mit analytisch ausdrückbaren zugehörigen Potentialen sind solche, bei denen das Dichteprofil einem radialen Potenzgesetz folgt, d.h. für die gilt

$$\varrho(r) = \varrho_1 \left( \frac{r}{r_1} \right)^\alpha. \quad (1.22)$$

Dabei ist  $\varrho_1$  die Dichte bei einem beliebigen Referenzradius  $r_1$ . Da der Exponent  $\alpha$  frei wählbar ist, lassen sich sehr verschiedene astrophysikalische Gebilde zumindest in stückweiser Näherung durch ein solches Potenzgesetz darstellen.

Eine besonders einfache Konfiguration ist eine homogene Kugel vom Radius  $R$ , d.h. mit konstanter Massendichte  $\varrho(r) = \varrho_1$  für alle  $r \leq R$ , sowie mit  $\varrho(r > R) = 0$ . Im Inneren der Kugel ist  $M_r = 4\pi r^3 \varrho_1 / 3$ , und die radiale Beschleunigung beträgt

$$\ddot{r} = -\frac{GM_r}{r^2} = -\omega^2 r, \quad (1.23)$$

was genau die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators mit der Kreisfrequenz  $\omega \equiv \sqrt{4\pi G \varrho_1 / 3} = \sqrt{GM/R^3}$  darstellt. Da der vektorielle Drehimpuls im

kugelsymmetrischen Potential erhalten bleibt, bleibt die Bahnbewegung wieder auf eine Ebene beschränkt. Mit  $r^2 = x^2 + y^2$  resultieren aus der Bewegungsgleichung dann also harmonische Oszillationen sowohl in  $x$  als auch in  $y$ ,

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \sin \omega t \quad (1.24)$$

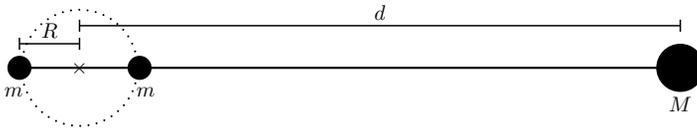
mit der gemeinsamen Periode  $U = 2\pi/\omega$ . Die zugehörige Bahnkurve ist eine Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$ , deren Werte sich aus den Erhaltungsgrößen ergeben. Allerdings befindet sich das Massenzentrum  $r = 0$  nun im Mittelpunkt dieser Ellipsenbahn, *nicht* im Brennpunkt wie im Keplerproblem mit einer Zentralmasse. Auch hängt die Umlaufzeit  $U$  nur von der Dichte ab, aber nicht vom Abstand, d.h. innen und weiter außen befindliche Objekte laufen perfekt synchron um das Zentrum. Natürlich ist dieses Szenario mit konstanter Dichte streng genommen unrealistisch, aber es illustriert sehr deutlich die erheblichen Unterschiede zwischen den Eigenschaften von Keplerbahnen um eine Zentralmasse und von Bewegungen im Potential einer ausgedehnten Massenverteilung. Anwendungen von Gl. (1.23) und der zugehörigen Lösung Gl. (1.24) sind beispielsweise die Betrachtung des „freien Falls“ einer Probemasse innerhalb der Sonne (s. Abschn. 5.4.1) oder die Bahnen von Sternen um das galaktische Zentrum (s. Abschn. 10.5.5).

Ebenfalls von großer Bedeutung in der Astrophysik ist ein Potenzgesetz-Dichteverlauf (Gl. 1.22) für den Spezialfall  $\alpha = -2$ . Dann ist die eingeschlossene Masse  $M_r \propto r$ , und die Kreisbahngeschwindigkeit ergibt sich aus Gl. (1.21) zu  $v_K(r) = \text{const.}$ , unabhängig vom Abstand. Ein mathematisch idealisiertes Gebilde mit diesen Eigenschaften heißt auch *singuläre isotherme Sphäre (SIS)* – wobei die Bezeichnung „isotherm“ eine Analogie zu thermodynamischen Systemen nahelegt, die wie oben schon gesagt nur mit sehr vielen Einschränkungen gültig ist. Wir werden dieses Konzept bei der Betrachtung der Rotationskurven von Galaxien (s. Abschn. 11.4.2) und bei den Massenprofilen von Ansammlungen dunkler Materie (s. Abschn. 12.6.3) wieder aufgreifen und weiter untersuchen. Natürlich kann auch eine Dichteverteilung  $\varrho \propto r^{-2}$  immer nur über einen begrenzten Radiusbereich gelten, da ansonsten für  $r \rightarrow 0$  die Dichte und für  $r \rightarrow \infty$  die Gesamtmasse divergieren würden.

Allgemein ist die Ermittlung des Potentials und die Lösung der Bewegungsgleichungen für eine beliebige vorgegebene Dichteverteilung eine anspruchsvolle Aufgabe, die in der Regel nur numerisch gelöst werden kann. In der Astrophysik ist die Problemstellung aber häufig umgekehrt: Aus der beobachteten Bewegung von Körpern in einem Gravitationsfeld errechnet man die wirkenden Beschleunigungen, aus denen dann das Potential ermittelt wird; schließlich rekonstruiert man daraus die räumliche Verteilung der gravitierenden Massen.

### 1.1.6 Gezeitenkräfte

Ein wichtiger Aspekt der gravitativen Wechselwirkung ausgedehnter Körper sind die *differentiellen* Kräfte, die durch die unterschiedlichen Anziehungen der einander zu- und abgewandten Seiten entstehen. Die Größenordnung solcher Effekte kann man näherungsweise durch ein vereinfachtes Szenario abschätzen, in dem das Problem wieder auf die vertraute Wechselwirkung von nur zwei Massenpunkten reduziert wird. Wir betrachten dazu zwei Körper mit Massen  $m_1 = m_2 = m$  im Abstand  $2R$  voneinander; ferner soll sich im Abstand  $d$  zu dem gemeinsamen Schwerpunkt noch eine gravitativ bedeutende Masse  $M \gg m$  befinden (s. Abb. 1.3).



**Abb. 1.3.** Skizze zur Entstehung von Gezeitenkräften als Differenz der Anziehung von  $m_1$  und  $m_2$  durch  $M$ .

Die durch  $M$  auf die beiden Massenelemente ausgeübte Anziehungskraft unterscheidet sich um den Betrag

$$\Delta F_G = \frac{GMm}{(d-R)^2} - \frac{GMm}{(d+R)^2} = G \frac{Mm}{d^2} \left( \frac{1}{(1-R/d)^2} - \frac{1}{(1+R/d)^2} \right). \quad (1.25)$$

Für  $R/d \ll 1$  kann dieser Ausdruck in eine Potenzreihe entwickelt werden, die nach dem ersten Glied abbricht,

$$\Delta F_G \approx G \frac{Mm}{d^2} \left( 1 + 2 \frac{R}{d} - \left( 1 - 2 \frac{R}{d} \right) \right) = 4GMm \frac{R}{d^3}. \quad (1.26)$$

Mit dieser Kraft werden die beiden Massenpunkte also effektiv auseinandergezogen. Der Betrag der Kraft hängt in dieser Näherung invers von der dritten Potenz des Abstands  $d$  ab,  $\Delta F_G$  wird daher relevant vor allem bei kleinen Abständen  $d$  zur externen gravitierenden Masse  $M$ . Sind die beiden Massenpunkte Teile eines größeren Körpers, dann wird dieser in Richtung der Verbindungslinie der beiden Punkte verformt. Das Phänomen der Meeresgezeiten auf der Erdoberfläche (s. Abschn. 4.2.1) lässt sich so durch die Einwirkung des Mondes erklären, insbesondere in Verbindung mit der Erdrotation. In Anlehnung daran spricht man ganz generell von Gezeitenkräften, wenn Gln. (1.25) bzw. (1.26) anwendbar sind. Gezeitenkräfte sind von großer Bedeutung in der Astrophysik. Sie begrenzen beispielsweise die Stabilität kleiner Körper in der Nähe von massereichen Objekten (s. Abschn. 3.4.1), und sie führen zur Abbremsung der Relativbewegung benachbarter Galaxien zueinander und letztlich zu ihrer Verschmelzung (s. Abschn. 14.3.4).

## 1.2 Thermodynamik

In der Thermodynamik geht es um das Verhalten makroskopischer Materiemengen oder Systeme bei Energiezufuhr oder -abnahme sowie um die Zusammenhänge dieses Verhaltens mit der eigentlichen Vielteilchennatur der Materie. Wir gehen hier äußerst selektiv vor und greifen uns aus dieser sehr breiten Thematik nur einige wenige Punkte heraus, die als Grundlage für im Buch behandelte astrophysikalische Fragen dienen sollen.

### 1.2.1 Zustandsgrößen und Zustandsgleichung

Die Charakterisierung eines thermodynamischen Systems erfolgt über *Zustandsgrößen*. Zu diesen gehört die Anzahl der Teilchen, das von ihnen eingenommene Volumen, aber auch Größen, die bestimmte Verhaltensaspekte beschreiben, insbesondere der Druck und die Temperatur. Die letzteren Größen werden als *intensive* Zustandsgrößen bezeichnet, weil sie sich bei der Aufteilung eines (homogenen) Systems in Untersysteme nicht ändern.

Für alle diese Größen gibt es präzise thermodynamische Definitionen. Wohl am schwierigsten zu fassen ist die Deutung der Temperatur: Makroskopisch gibt die Temperatur den Wärmegehalt eines Körpers an, mikroskopisch stellt sie (unter anderem) ein Maß für die mittlere Energie der beteiligten Teilchen dar. Für die Astrophysik ist vor allem dieser mikroskopische Temperaturbegriff relevant, wobei je nach Kontext ganz unterschiedliche Temperaturdefinitionen möglich sind, die sich jeweils auf eine spezielle statistische Verteilungsfunktion beziehen. Beispielsweise gibt die *kinetische Temperatur* eines Gases die typische Bewegungsenergie der Gasteilchen an, charakterisiert durch die Maxwell-Boltzmann-Verteilung der Geschwindigkeiten (s. Abschn. 1.2.2), während die *Strahlungstemperatur* die Intensität und die spektrale Energieverteilung der Photonen gemäß der Planck-Funktion (s. Abschn. 1.3.4) innerhalb des gleichen Systems erfasst.

Wenn sich die Zustandsgrößen eines Systems zeitlich nicht ändern, so spricht man von einem Gleichgewichtszustand. Insbesondere ist thermodynamisches Gleichgewicht dadurch gekennzeichnet, dass die Temperatur in *allen* relevanten Verteilungsfunktionen den gleichen Wert hat; eigentlich kann man nur dann von *der* Temperatur eines Systems sprechen.

Eine weitere fundamentale Zustandsgröße ist die Dichte, ausgedrückt entweder als Massendichte  $\varrho$  mit der Einheit  $\text{kg m}^{-3}$  oder als Anzahl-Teilchendichte  $n$  mit der Einheit  $\text{m}^{-3}$ . Die in der Thermodynamik ansonsten verbreitete Verwendung von Mol als Einheit der Stoffmenge spielt in der Astrophysik keine Rolle. Entsprechend tritt hier die *mittlere Masse pro Teilchen*  $\mu m_p$  meist an die Stelle der sonst verwendeten molaren Masse. Dabei ist  $m_p$  die Masse eines Protons (also eines Wasserstoffatomkerns) als Bezugsgröße ausgewählt, einfach weil der Wasserstoff das häufigste Element im Universum ist. Bis auf einen sehr kleinen Unterschied durch den Massendefekt ist  $m_p$  nahezu gleich der atomaren Masseneinheit  $u$ .  $\mu$  ist hingegen eine dimensionslose Zahl, die das jeweilige System charakterisiert (verwirrenderweise oft „Molekulargewicht“ genannt, auch wenn die meisten astrophysikalischen Systeme gar keine Moleküle enthalten, sondern Atome oder Ionen). Der Wert von  $\mu$  ergibt sich durch einen gewichteten Mittelwert aus der chemischen Zusammensetzung der Materie sowie aus deren Aggregatzustand: Für jeden Teilchentyp wird die Masse in Einheiten der Protonenmasse multipliziert mit dem prozentualen Anteil des Teilchens an der Gesamtheit. Beispielsweise hat ein reines Wasserstoffgas in monoatomarem Zustand den Wert  $\mu = 1.0005 \approx 1$  einschließlich des Beitrags des Elektrons, als molekulares Gas ( $\text{H}_2$ ) hat es den Wert  $\mu \approx 2$ , und als ionisiertes Plasma den Wert  $\mu \approx 0.5$ , da nun sowohl Protonen als auch Elektronen als eigenständige Teilchen zu zählen sind. Beimischungen schwererer Elemente erhöhen  $\mu$  entsprechend ihres jeweiligen Anteils an den Teilchendichten. Mit der mittleren Masse pro Teilchen ist die Umrechnung von Anzahl- auf Massendichten dann gegeben durch

$$\varrho = \mu m_p \cdot n. \quad (1.27)$$

Manche Zustandgrößen sind unabhängig voneinander, z.B. kann ein System gegebener Temperatur natürlich aus unterschiedlich vielen Teilchen bestehen. Insgesamt existieren aber für alle Materiezustände bestimmte Relationen zwischen verschiedenen Zustandsgrößen; diese werden als *Zustandsgleichungen* bezeichnet (auch dann, wenn die Relationen so kompliziert sind, dass sie sich nicht als einfache Gleichung aufschreiben lassen). Die wichtigste – und für dieses Buch einzige relevante – Zustandsgleichung drückt den jeweils gültigen Zusammenhang zwischen Druck  $P$ , Dichte  $\varrho$  bzw.  $n$  sowie Temperatur  $T$  aus, etwa in der Form  $P = P(\varrho, T)$ .

Für ein *ideales Gas* gilt eine besonders einfache Zustandsgleichung, nämlich

$$P = \frac{\rho}{\mu m_p} k_B T = n k_B T, \quad (1.28)$$

worin noch die Boltzmann-Konstante  $k_B$  auftaucht. Unter einem idealen Gas versteht man ein System von Teilchen, deren Eigenvolumina vernachlässigbar sind, die sich ungerregelt und unabhängig voneinander bewegen und lediglich über elastische Stöße miteinander wechselwirken. Diese Modellvorstellung ist auf erstaunlich viele astrophysikalische Systeme in guter Näherung anwendbar, weshalb die Zustandsgleichung (1.28) immer wieder in diesem Buch benötigt wird.

Bei hohen Dichten wie z.B. im Inneren von Planeten, und erst recht beim Einsetzen quantenphysikalischer Wechselwirkungen wie etwa in den entarteten Zentralregionen von Sternen und stellaren Überresten, ist die jeweilige Zustandsgleichung erheblich komplexer und oft noch nicht einmal gut bekannt. Sie ist dann in der Regel auch nicht durch eine einzige Gleichung auszudrücken, sondern nur mittels numerischer Rechenvorschriften, teilweise auf tabellierten Daten beruhend.

### 1.2.2 Statistische Thermodynamik

Bei einer sehr großen Anzahl von Teilchen kommt es nicht mehr darauf an, das Verhalten der einzelnen Teilchen individuell zu verfolgen; statt dessen werden Verteilungsfunktionen gesucht, die quantitativ Auskunft geben, welcher Anteil der Teilchen bestimmte mikroskopischen Eigenschaften – z.B. Aufenthaltsorte, Geschwindigkeiten und Bewegungsrichtungen oder auch atomare Anregungs- oder Ionisationsniveaus aufweisen. Der zentrale Begriff in der statistischen Thermodynamik ist der des *Zustands* eines Systems, der durch die Gesamtheit aller beteiligten Teilchen und ihrer Eigenschaften festgelegt ist und als konkrete Realisierung eines Teilchenensembles aus einer Vielzahl *möglicher* Zustände angesehen wird. Betrachtet man *alle* möglichen Zustände, können diese mehr oder weniger wahrscheinlich sein, was statistisch gleichbedeutend ist mit der relativen Häufigkeit, mit der solche Zustände dann tatsächlich auftreten. Mathematisch werden diese Wahrscheinlichkeiten bzw. Häufigkeiten als Verteilungen durch kontinuierliche Dichtefunktionen repräsentiert; daraus erhält man „echte“ (nicht infinitesimale) Häufigkeiten, indem man diese Dichtefunktionen über die relevanten Wertebereiche der unabhängigen Variablen integriert. Wir rekapitulieren nun kurz die für die Astrophysik wichtigsten dieser Verteilungsfunktionen.

Verschiedene mögliche Zustände eines Systems unterscheiden sich in der Regel durch ihre jeweilige Energien. Im thermodynamischen Gleichgewicht ist die Wahrscheinlichkeitsdichte  $p$ , das System in dem energetischen Zustand  $E$  anzutreffen, gegeben durch die *Boltzmann-Verteilung*

$$p(E) = \frac{1}{Z} e^{-E/(k_B T)}, \quad (1.29)$$

wieder mit der Boltzmann-Konstanten  $k_B$ . Die Temperatur  $T$  ist hier der entscheidende Parameter, der die genaue Form der Verteilungsfunktion festlegt. Der Normierungsfaktor  $1/Z$  (die Zustandssumme) legt fest, dass die Gesamtheit aller möglichen Zustände die Wahrscheinlichkeit 1 hat.

Auch wenn die Boltzmann-Verteilung bzw. die ihr zugrunde liegende Boltzmann-Statistik sehr vielfältige Anwendungen hat, gilt sie nicht immer, sondern ist an die Voraussetzung des thermodynamischen Gleichgewichts geknüpft. Es ist prinzipiell auch möglich, Verteilungen für Nicht-Gleichgewichtszustände auszurechnen, aber solche Rechnungen sind dann sehr spezifisch für den jeweiligen Fall durchzuführen. Bemerkenswert an der Boltzmann-Verteilung sowie von ihr abgeleitete Verteilungen ist hingegen gerade ihre unspezifische Form, worauf schon die Einfachheit von Gl. (1.29) hinweist sowie die Tatsache, dass lediglich eine Variable ( $E$ ) und ein Parameter ( $T$ ) zur Charakterisierung ausreichen.

Wendet man die Boltzmann-Statistik auf die Bewegungszustände von Gasteilchen an, so ergeben sich Verteilungsfunktionen für die Geschwindigkeiten der einzelnen Partikel. Grundsätzlich geht man in der statistischen Thermodynamik ja davon aus, dass die Bewegungen ungeordnet und quasi „zufällig“ erfolgen; der Zufall wird allerdings eingeschränkt durch entsprechende Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Je nach dem, ob man die Geschwindigkeitskomponenten in bestimmten Richtungen (etwa in Bezug auf ein vorgegebenes Koordinatensystem) oder nur den Betrag der Geschwindigkeit im Raum betrachtet, nimmt die Verteilungsfunktion eine etwas andere Form ein. Für jede einzelne Komponente  $v_{x,y,z}$  muss bei komplett ungeordneter Bewegung der *wahrscheinlichste Wert* gerade Null sein mit einer dazu symmetrischen Verteilung; die Wahrscheinlichkeitsdichte, ein Teilchen mit einer bestimmten Geschwindigkeit  $v_x$  in  $x$ -Richtung anzutreffen, ist dann durch die eindimensionale Version der *Maxwell-Boltzmann-Verteilung* gegeben,

$$p(v_x) = \frac{1}{Z} e^{-E_{\text{kin},x}/k_B T} = \frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-v_x^2/(2\sigma_v^2)} \quad (1.30)$$

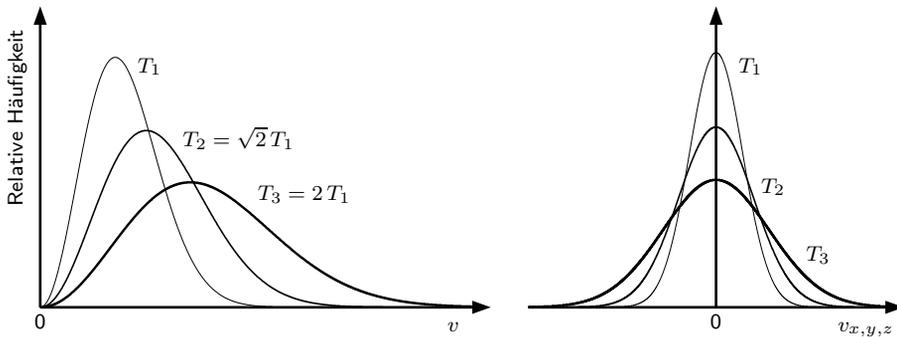
$$\text{mit } \sigma_v = \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \quad (1.31)$$

und entsprechend für die  $y$ - und  $z$ -Koordinaten. Die Exponentialverteilung der (kinetischen) Energien aus Gl. (1.29) geht hier also unmittelbar in einer Gaußsche Normalverteilung der zugehörigen Geschwindigkeitskomponenten über, mit  $m$  als der Masse des jeweiligen Partikels. Daher lässt sich die rechte Seite von Gl. (1.30) samt Normierungsfaktor so aufschreiben, dass die Temperatur und Konstanten in der in Gl. (1.31) definierten Größe  $\sigma_v$  kombiniert werden. Mathematisch ist  $\sigma_v$  die Standardabweichung der Geschwindigkeiten bezogen auf eine feste Richtung. Je höher die Temperatur, desto größer ist  $\sigma_v$  und desto häufiger (wahrscheinlicher) sind vom Betrag her größere Geschwindigkeiten (s. Abb. 1.4).

Oft sind aber nicht die einzelnen Geschwindigkeitskomponenten von Belang, sondern die Beträge der Geschwindigkeit der Partikel im Raum,  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ . Die Maxwell-Boltzmann-Verteilungsfunktion  $p(v)$  lautet dann

$$p(v) = \frac{1}{\sigma_v^3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot v^2 \cdot e^{-v^2/(2\sigma_v^2)}. \quad (1.32)$$

In dieser Form ist  $p(v)$  asymmetrisch (s. Abb. 1.4 links): Einerseits ist die Wahrscheinlichkeit verschwindend klein, dass alle Geschwindigkeitskomponenten gleichzeitig genau Null sind, also gilt  $p(v=0) = 0$ . Andererseits ist immer  $v > 0$ , und  $p(v)$  geht zwar gegen Null für Geschwindigkeiten  $v \gg \sigma_v$ , es gibt aber keinen harten Höchstwert. Das Maximum von  $p(v)$  liegt bei  $\hat{v} = \sigma_v \sqrt{2}$ , der Mittel- oder Erwartungswert  $\langle v \rangle$  beträgt  $\sigma_v \sqrt{8/\pi}$ . Die *mittlere kineti-*



**Abb. 1.4.** Links: Maxwell-Boltzmann-Verteilungen der Teilchengeschwindigkeiten in einem Gas der Temperatur  $T$ , für drei verschiedene Temperaturen. Rechts: Die entsprechenden Verteilungen einer einzelnen Geschwindigkeitskomponente in Bezug auf ein vorgegebenes Koordinatensystem.

sche Energie pro Teilchen ( $\langle E_{\text{kin}} \rangle$ ) erhält man durch Mittelung der Geschwindigkeitsquadrate, sie beträgt

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_{\text{B}} T. \quad (1.33)$$

Man beachte, dass im thermodynamischen Gleichgewicht ein perfekter Energieaustausch zwischen allen Bestandteilen des Gases angenommen wird. Besteht das Gas aus verschiedenen Teilchenarten unterschiedlicher Massen  $m_i$ , so ist  $\langle E_{\text{kin}} \rangle$  für alle Teilchen gleich, die mittleren *Geschwindigkeiten* sind jedoch proportional zu  $\sigma_v$  und unterscheiden sich voneinander jeweils um einen Faktor  $1/\sqrt{m_i}$ .

Aus der Verbindung von statistischer Thermodynamik und Quantenphysik ergeben sich weitere Verteilungsfunktionen, auf die wir an gegebener Stelle noch zu sprechen kommen. Für die Astrophysik wichtig sind insbesondere die Verteilungsfunktion von Photonenenergien im thermodynamischen Gleichgewicht (s. Abschn. 1.3.4) und von Anregungs- und Ionisationsstufen in Atomen (s. Abschn. 1.3.9).

### 1.2.3 Zustandsänderungen

Ein großer Teil der Thermodynamik befasst sich mit den Vorgängen bei verschiedenen Arten von Zustandsänderungen. Wir picken uns hier nur zwei Aspekte heraus, die im weiteren Verlauf des Buchs mehrfach benötigt werden, nämlich zum einen das Konzept der *adiabatischen* Zustandsänderung, zum anderen die Ausbreitung von *Schallwellen*.

Zuvor rekapitulieren wir noch ganz kurz die Hauptsätze der Thermodynamik. Der *erste Hauptsatz* besagt, dass in einem abgeschlossenen System die Gesamtenergie eine Konstante darstellt; dieses Prinzip der Energieerhaltung wurde bereits in der klassischen Mechanik formuliert und in der Thermodynamik um den Wärmebegriff erweitert, z.B. im Zusammenhang mit dissipativen Prozessen (Reibung). Der *zweite Hauptsatz der Thermodynamik*, für den es eine Vielzahl gleichwertiger Formulierungen gibt, stellt klar, dass elementare thermodynamische Vorgänge irreversibel sind, so dass beispielsweise der Wärmeausgleich zwischen zwei Körpern unterschiedlicher Temperatur immer vom wärmeren zum kühleren Körper erfolgt, außer infolge einer äußeren Einwirkung. In manchen Darstellungen der Thermodynamik finden sich weitere physikalische Aussagen ebenfalls zu „Hauptsätzen“ ernannt, auf die wir hier aber nicht eingehen.

Eine spezielle Form der Zustandsänderung eines Systems findet statt, wenn dabei keine Wärme mit seiner Umgebung ausgetauscht wird; solche Vorgänge werden als *adiabatisch* bezeichnet. Natürlich ist dies ein idealisiertes Konzept, das in realen Systemen allenfalls näherungsweise erfüllt sein kann. Es gibt aber eine ganze Reihe von Situationen, in denen die Annahme der Adiabase gut gerechtfertigt ist. Insbesondere ist dies der Fall bei sehr schnellen Änderungen, bei denen sozusagen einfach keine Zeit zum Austausch mit der Umgebung bleibt, oder auch (astrophysikalisch sehr relevant) bei extrem geringen Dichten, die alle Energietransportmechanismen ineffizient werden lassen.

Ein illustratives Beispiel für einen adiabatischen Prozess ist die Kompression eines (idealen) Gases, etwa in einem wärmeisolierten Container, in den ein gut abschließender Stempel hineinfährt. Bei einer solchen adiabatischen Kompression erhöhen sich gleichzeitig und auf eine bestimmte Weise alle drei Zustandsgrößen Druck, Dichte und Temperatur. Die infolge der Kompression und der Konstanz der Gesamtenergie erhöhte Energiedichte wird von den Gasteilchen in vermehrte Bewegung umgesetzt, und zwar sowohl in Translationsbewegungen im Raum als auch – sofern die Teilchen nicht als Massenpunkte aufgefasst werden können – in Rotations-, Schwingungs- und Vibrationsbewegungen der Teilchen selbst. Die Anzahl der möglichen solcher Bewegungsformen (die „Freiheitsgrade“  $f$  der Teilchen) – bestimmt die Aufnahmefähigkeit des Gases an Wärmeenergie (die Wärmekapazität) über den *Adiabatindex*  $\gamma \approx (f + 2)/f$ . Für ein monoatomares Gas oder Plasma (in dem nur Translationsbewegungen möglich sind) ist  $f = 3$  und  $\gamma \approx 5/3$ , für ein Gas aus zweiatomigen Molekülen ist  $f = 5$  und  $\gamma \approx 7/5$ .

Der Temperaturänderung bei Kompression von einem Anfangsvolumen  $V_1$  auf ein Endvolumen  $V_2$  beträgt dann

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \quad (1.34)$$

d.h. bei der adiabatischen Kompression eines monoatomaren idealen Gases um einen Faktor 8 würde die Temperatur um einen Faktor  $8^{2/3} = 4$  ansteigen. Ähnliche Relationen existieren zwischen den anderen Zustandsgrößen.

Bei hinreichend langsam erfolgenden Zustandsänderungen kann das System zu jedem Zwischenzeitpunkt als annähernd im Gleichgewicht angesehen werden. Solche „quasi-statischen“ Änderungen können trotzdem adiabatisch erfolgen, wenn die Zeitskalen für die Einstellung eines inneren Gleichgewichts deutlich kleiner sind als für den Wärmeaustausch mit der Umgebung.

Eine der häufigsten Anwendungen für das Konzept der adiabatischen Zustandsänderung ist die Ausbildung kleiner periodischer Dichteschwankungen, die zur Ausbreitung von Schallwellen führt. Unter normalen irdischen Bedingungen sind die damit verbundenen Dichte- und Temperaturänderungen meist recht klein, außer bei explosiven Vorgängen.

Schallwellen spielen aber auch in verschiedenen astrophysikalischen Kontexten eine bedeutende Rolle. Sie beschreiben allgemein die Reaktion eines Systems auf kleine Gleichgewichtsstörungen. Beispielsweise wird die Sonne nach einem „Sonnenbeben“, das durch den Aufprall von zuvor herausgeschleuderter und wieder herabfallender Materie entsteht, von einer klar identifizierbaren Schallwelle durchlaufen (s. Abschn. 5.4.2).

Die Ausbreitung von Schallwellen erfolgt mit einer charakteristischen Gruppengeschwindigkeit, der *Schallgeschwindigkeit*  $c_s$ . Für ein ideales Gas mit Partikeln der Masse  $m$  ist

$$c_s = \sqrt{\gamma \frac{k_B T}{m}}. \quad (1.35)$$

Bei Berechnung der Schallgeschwindigkeit in einem Gasgemisch ist hier für  $m$  die mittlere Teilchenmasse  $\mu m_p$  einzusetzen.

Die Schallgeschwindigkeit ist betragsmäßig nahezu gleich – aber nicht identisch mit – der mittleren Raumgeschwindigkeit  $\langle v \rangle$  der einzelnen Partikel (s. Abschn. 1.2.2). Man beachte jedoch, dass sich Schallwellen gradlinig über große Distanzen ausbreiten können, während sich einzelne Partikel ungeordnet bewegen; obendrein behält jedes Partikel seine momentane Bewegungsrichtung immer nur bis zum nächsten Stoß mit anderen Partikeln bei. Über große Entfernungen kommt eine Schallwellenfront daher sogar erheblich schneller voran als die einzelnen Teilchen.

Der Wert von  $c_s$  in einem idealen Gas hängt nach Gl. (1.35) – für festes  $\gamma$  und für einen gegebenen Partikelmix – nur von der Temperatur ab, nicht vom Druck oder von der Dichte. Da astrophysikalische Systeme sehr unterschiedliche Temperaturen haben können, variiert entsprechend auch die Schallgeschwindigkeit erheblich.

Anhand der Schallgeschwindigkeit lässt sich leicht abschätzen, wie schnell ein System auf Störungen reagieren kann, ohne dass es zu Rückkopplungseffekten kommt: Mit  $D$  als der linearen Größe des Systems, etwa dem Durchmesser einer Kugel oder der Dicke einer Schicht, ist  $t_D = D/c_s$  die Zeitdauer, die eine Schallwelle zur Durchquerung benötigt. Diese Zeitdauer ist dann zu vergleichen mit der Zeitskala der Störung selbst. Ist letztere bedeutend länger, wird sich nur eine Schallwelle ausbreiten; ist sie vergleichbar oder kürzer als  $t_D$ , kann es zur Aufschaukelung der Störung und zu nichtlinearen Effekten kommen. Solche Zeitskalenbetrachtungen sind in der Astrophysik sehr beliebt, weil sie einen einfachen Zugang zu möglicherweise sehr komplexen Vorgängen bieten.

Allgemein kann man sagen, dass makroskopische Materiebewegungen mit Überschallgeschwindigkeit  $v > c_s$  grundsätzlich nicht mehr durch Schallwellen „abgefangen“ werden können. Statt dessen bilden sich Diskontinuitäten in der Dichte- und Druckverteilung aus, die als *Schockfronten* bezeichnet werden und je nach Situation zu Verdichtungen oder lokalen Temperaturerhöhungen um mehrere Größenordnungen führen können. Wir befassen uns in Abschn. 9.5.2 etwas detaillierter mit diesem Phänomen im Zusammenhang mit Supernova-Explosionen im interstellaren Medium.

## 1.3 Strahlung

### 1.3.1 Das elektromagnetische Spektrum

Elektromagnetische Strahlung breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit aus, deren Wert  $c$  im Vakuum eine fundamentale Naturkonstante darstellt. Die Wellenlänge  $\lambda$  bzw. Frequenz  $\nu$  hängen über die Beziehung

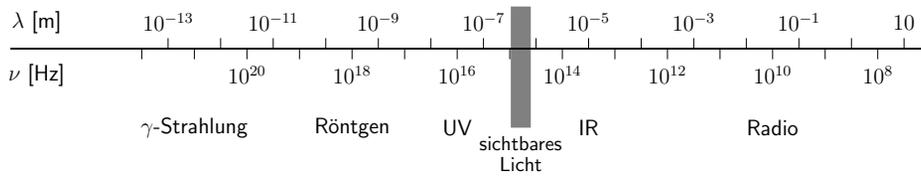
$$c = \lambda \cdot \nu, \quad (1.36)$$

miteinander zusammen.

Die Wellenlänge bzw. Frequenz der Strahlung im Wellenbild entspricht dem Energiegehalt eines einzelnen Photons im Teilchenbild,

$$E = h \nu = \frac{h c}{\lambda} \quad (1.37)$$

mit  $h$  als dem Planckschen Wirkungsquantum.



**Abb. 1.5.** Wellenlängen  $\lambda$  und Frequenzen  $\nu$  in den verschiedenen Spektralbereichen der elektromagnetischen Strahlung.

Das Spektrum der elektromagnetischen Strahlung umfasst viele Zehnerpotenzen, von meterlangen Radiowellen bis hin zu extrem hochenergetischen Gammaphotonen. Einen Überblick über die Benennung der verschiedenen Bereiche des Spektrums gibt Abb. 1.5, wobei die genauen Grenzen auf mehr oder weniger willkürlichen Festlegungen beruhen. Für die spektrale Einheit werden in der Astrophysik unterschiedliche, weitgehend aus den jeweiligen Messtechniken entwachsene Konventionen verwendet: Im Radiobereich wird überwiegend mit Frequenzen gearbeitet; im optischen, infraroten und UV-Spektralbereich gibt man üblicherweise Wellenlängen an, und die hochenergetische Strahlung im Röntgen- und Gammabereich wird meist durch die jeweiligen Photonenenergien charakterisiert. Natürlich sind alle diese Angaben gleichwertig und können über Gl. (1.37) ineinander umgerechnet werden. In diesem Buch drücken wir Spektren und spektrale Energieverteilungen bis auf wenige Ausnahmen grundsätzlich in Wellenlängen aus.

### 1.3.2 Strahlungsgrößen

Die von der Oberfläche einer Strahlungsquelle ausgehende Strahlung wird primär durch ihre *Intensität*  $I$  charakterisiert (dazu kommt ggf. auch noch die *Polarisation*, s.u.). Wir betrachten die Energiemenge  $dE$ , die von einem kleinen Fleck der Fläche  $dA$  auf der Oberfläche der Quelle in eine bestimmte Richtung  $\theta, \phi$  abgestrahlt wird. Diese Energiemenge ist proportional zur Fläche, zum Zeitintervall  $dt$  sowie zur Größe des Raumwinkels  $d\Omega$  um den vorgegebenen Richtungsvektor. Die Intensität ist dann definiert als der Proportionalitätsfaktor in der Beziehung

$$dE = I dt dA d\Omega. \quad (1.38)$$

Die *monochromatische Intensität*  $I_\lambda$  bezeichnet analog die abgestrahlte Energiemenge *pro Wellenlängenintervall*  $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ . In SI-Einheiten ausgedrückt, ist  $I_\lambda$  die Energiemenge, die pro Sekunde durch eine Fläche von  $1 \text{ m}^2$  in Richtung eines Raumwinkels von 1 sterad hindurchfließt, gemessen über eine spektrale Bandbreite von  $10^{-9} \text{ m} = 1 \text{ nm}$ . Analog lässt sich auch eine auf Frequenzen bezogene monochromatische Intensität  $I_\nu$  festlegen.

Ein besonders einfaches Strahlungsfeld liegt für den idealisierten Fall des exakten thermischen Gleichgewichts vor. Die Intensität ist dann unabhängig von der Richtung, das Strahlungsfeld ist „isotrop“; seine spektrale Energieverteilung lässt sich mit der Planckschen Funktion  $I_\lambda = B_\lambda(T)$  (s. Abschn. 1.3.4) beschreiben.

Für reale Objekte hängt die Intensität oftmals von der Richtung ab,  $I = I(\theta, \phi)$ . Durch Integration über alle Richtungen „nach außen“, d.h.  $\theta \leq 90^\circ$ , erhält man den *Strahlungsfluss*

$$F = \int_{\theta} \int_{\phi} I \sin \theta \, d\theta \, d\phi, \quad (1.39)$$

d.h. die Energiemenge, die pro Zeiteinheit durch eine Einheitsfläche hindurchtritt und von der Quelle abgestrahlt und daher auch als *Flächenhelligkeit* bezeichnet wird. Die Gesamtstrahlungsleistung (Leuchtkraft) des Objektes, auszudrücken als Energiemenge pro Zeit, ergibt sich dann durch Integration über die Oberfläche,

$$L = 4\pi R^2 \cdot F. \quad (1.40)$$

Bei der Beobachtung einer Quelle in einer Entfernung  $r$  vom Mittelpunkt der Kugel misst man den *Strahlungsstrom*

$$s = \frac{L}{4\pi r^2} = F \left( \frac{R^2}{r^2} \right). \quad (1.41)$$

Alle Begriffe sind gleichermaßen gültig, wenn man den *monochromatischen Strahlungsstrom*  $s_\lambda$  bzw.  $s_\nu$  betrachtet. Die Größen  $s_\lambda$  und  $s_\nu$  sind äquivalent und durch die Beziehungen  $s_\lambda \, d\lambda = s_\nu \, d\nu$  und  $\nu = c/\lambda$  miteinander verknüpft.

Man beachte, dass der beobachtete Strahlungsstrom  $s$  einerseits und die Flächenhelligkeit  $F$  eines Objekts an seiner Oberfläche andererseits in den gleichen Einheiten ( $\text{W m}^{-2}$ ) angegeben werden, dass aber die beiden Größen physikalisch völlig verschiedenartiger Natur sind. Für astronomische Objekte ist nur der Strahlungsstrom eine direkte Messgröße; um die Flächenhelligkeit zu messen, müsste man auf der Oberfläche des Objektes ein Messinstrument anbringen.

Die *Polarisation* der Strahlung gibt an, in welcher Richtung (senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung) der Vektor der elektrischen Feldstärke schwingt. Zu einer vollständigen Charakterisierung der Polarisation bei gegebener Wellenlänge sind – neben dem Gesamtstrahlungsstrom – noch drei weitere Größen erforderlich. Dabei gibt der *Polarisationsgrad* an, wie groß der Bruchteil der polarisierten Strahlung am Gesamtstrahlungsstrom ist. Zwei weitere Parameter werden zur Festlegung der Schwingungsrichtung im Raum benötigt.

### 1.3.3 Elementare Strahlungsprozesse: Emission und Absorption

Bei Absorption bzw. Emission eines Photons durch ein Atom ändert sich die Energie eines Elektrons der Atomhülle, d.h. es wechselt sein Energieniveau. Das energetisch niedrigste Niveau heißt Grundzustand. Darüber liegen zunächst etliche diskrete „angeregte“ Zustände. Für das Wasserstoffatom sind diese diskreten Energiewerte in guter Näherung durch die *Bohrsche Serienformel* gegeben,

$$E_s = -\frac{13.6 \text{ eV}}{s^2}, \quad s = 1, 2, 3, \dots \quad (1.42)$$

Für andere Elemente als Wasserstoff gibt es keine ähnlich einfache Formel zur Berechnung der Energieniveaus (abgesehen von hochionisierten „wasserstoffähnlichen“ Zuständen mit nur noch einem Elektron).

Oberhalb der *Ionisationsenergie*  $\chi$  ist das Elektron aus der Atomhülle befreit, dann ist jeder beliebige Energiewert  $E > \chi$  möglich. Für ein Wasserstoffatom im Grundzustand ist dieser Wert  $\chi_0 = 13.6 \text{ eV}$ , der Konstanten aus der Bohrschen Serienformel. Diese ungebundenen Zustände des Elektrons bilden also ein Kontinuum von Energiewerten.

Bei der Absorption bzw. Emission eines Lichtquants einer bestimmten Energie  $E_\gamma$  geht das Elektron in einen um diesen Energiebetrag höheren bzw. niedrigeren Energiezustand über. Der Betrag der Energiedifferenz zwischen Anfangs- und Endzustand ist gleich der Photonenenergie,  $E_\gamma = \Delta E = h\nu = hc/\lambda$ .

*Gebunden-gebundene* Übergänge erfolgen zwischen zwei gebundenen, diskreten Zuständen. Aufgrund der quantenmechanischen Beschränkung auf diskrete Zustände kann ein Photon von einem gegebenen Atom nur dann absorbiert werden, wenn zu der Energie des Photons  $E_\gamma$  auch ein energetisch passender Übergang zwischen möglichen Zuständen existiert, und wenn außerdem das untere Niveau dieses Übergangs auch tatsächlich mit einem Elektron besetzt ist. Wenn dies nicht der Fall ist, verbleiben Photon und Atom miteinander wechselwirkungsfrei. Solche Übergänge bewirken die Entstehung diskreter Spektrallinien in Absorption und Emission.

*Gebunden-freie* Übergänge führen von diskreten Niveaus ins Kontinuum der freien Zustände, also zur *Ionisation*. Hier hat das absorbierte Photon mindestens die Ionisationsenergie für den aktuell besetzten Zustand  $\chi_s$ . Die darüber hinausgehende Energie  $\Delta E = E_\gamma - \chi_s$  des absorbierten Quants wird in kinetische Energie  $mv^2/2$  des befreiten Elektrons verwandelt.

Umgekehrt führen *frei-gebundene* Übergänge zum Einfang eines anfänglich freien Elektrons, d.h. zur *Rekombination* des Atoms, wobei die gesamte Energiedifferenz – einschließlich der anfänglichen kinetischen Energie des Elektrons – als ein Photon ausgestrahlt wird (oder als mehrere Photonen in Folge einer Rekombinationskaskade von höheren zu niedrigeren Zuständen).

Bei *frei-freien* Übergängen bleibt ein freies Elektron weiterhin ungebunden; es ändert nur seine kinetische Energie, und zwar gerade um die Energie des absorbierten bzw. emittierten Lichtquants. Ein Beispiel für frei-freie Übergänge ist die *Bremsstrahlung* beim Durchgang durch das Coulombfeld eines Atomkernes oder Ions.

Übergänge der Elektronen im Atom können auch ohne direkte Beteiligung von Strahlung, sondern über inelastische Stöße zwischen den materiellen Teilchen eines Gases erfolgen. Dabei wird ein Teil der kinetischen Energie eines Teilchens in Anregungsenergie überführt, d.h. das Atom geht ohne Absorption eines Photons in einen angeregten Zustand über oder wird ionisiert. Umgekehrt ist auch Stoßabregung möglich, wobei dann ein angeregtes Atom in einen niedrigeren Zustand übergeht und die überschüssige Energie dem Stoßpartner als kinetische Energie überträgt.

### 1.3.4 Schwarzkörperstrahlung

Jeder Körper mit einer Temperatur  $T > 0$  K gibt elektromagnetische Strahlung an seine Umgebung ab. Die spektrale Verteilung dieser Strahlung kann sehr unterschiedlich aussehen je nach Temperatur, Zusammensetzung und Beschaffenheit des Körpers. Besonders einfach zu beschreiben ist die Strahlung, die von Körpern im exakten thermodynamischen Gleichgewicht ausgeht. Ein solcher – stark idealisierter – Körper stellt einen perfekten Absorber dar, d.h. alle eintreffende Strahlung wird zu 100% rezipiert – deshalb nennt man solche idealisierte Objekte auch *schwarze Körper*. Im Gleichgewicht darf sich aber die Temperatur des Körpers nicht ändern, d.h. er muss genauso viel Energie abstrahlen, wie er absorbiert.

Im Labor erhält man näherungsweise eine solche Strahlung aus einer kleinen Öffnung in einem Hohlraum, dessen Wände sehr genau auf konstanter Temperatur gehalten werden, und deren Innenseiten möglichst gut absorbieren. Man spricht daher auch von *Hohlraumstrahlung*. Dieser Strahlungstyp spielt in Astrophysik eine bedeutende Rolle, obwohl

viele reale Objekte das Spektrum eines schwarzen Körpers<sup>3</sup> allenfalls in grober Näherung aufweisen. Man kann oft zumindest einige globale Eigenschaften des Objektes über eine entsprechende Annahme erhalten. Die Einfachheit und Universalität der Gesetze für die Hohlraumstrahlung lassen solche Schlüsse selbst dann zu, wenn nur sehr wenig über die genaue Zusammensetzung eines Objektes bekannt ist.

Schwarzkörperstrahlung hat ein rein kontinuierliches Spektrum, zeigt also keine Absorptions- oder Emissionslinien, und sie ist isotrop, d.h. die Intensität ist unabhängig von der Strahlungsrichtung. Die Eigenschaften sind allein durch die Temperatur bestimmt.

Das *Plancksche Gesetz* beschreibt die spektrale Verteilung der Intensität für einen schwarzen Körper der Temperatur  $T$ . Es lautet

$$B_\lambda(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot (e^{hc/(\lambda k_B T)} - 1)^{-1} . \quad (1.43)$$

bzw. in Frequenzdarstellung

$$B_\nu(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot (e^{h\nu/(k_B T)} - 1)^{-1} , \quad (1.44)$$

Die auftretenden physikalischen Naturkonstanten sind das Plancksche Wirkungsquantum  $h$ , die Boltzmannkonstante  $k_B$  und die Lichtgeschwindigkeit  $c$ . Die Werte von  $B$  haben die Dimension von monochromatischen Intensitäten (vgl. Abschn. 1.3.2). Der Übergang von Gl. (1.43) zu (1.44) geschieht über die Beziehung  $B_\nu(\nu, T) d\nu = B_\lambda(\lambda, T) d\lambda$ . Man beachte, dass es nicht ausreicht, beispielsweise in Gl. (1.43) einfach nur  $\lambda$  durch  $c/\nu$  zu ersetzen; die so erzeugte Funktion wäre als  $B_\lambda(\nu, T)$  zu bezeichnen, was eben nicht identisch mit  $B_\nu(\nu, T)$  ist.

Das Spektrum der Schwarzkörperstrahlung nach dem Planckschen Gesetz ist für verschiedene Temperaturwerte in Abb. 1.6 skizziert. Das Maximum verschiebt sich mit wachsender Temperatur zu kürzeren Wellenlängen (bzw. zu höheren Frequenzen). Die Wellenlänge des Maximums von  $B_\lambda(\lambda, T)$  wird durch das *Wiensche Verschiebungsgesetz* angegeben,

$$\lambda_{\max} \cdot T = \text{const.} = 0.002898 \text{ m} \cdot \text{K} . \quad (1.45)$$

Für das Maximum von  $B_\nu$  gilt Entsprechendes. (Achtung: für festes  $T$  liegen die Maxima von  $B_\lambda(\lambda, T)$  und  $B_\nu(\nu, T)$  nicht bei den gleichen Punkten im Spektrum! Man sieht das deutlich beim Vergleich der beiden oberen Graphiken in Abb. 1.6.)

Für kurze Wellenlängen  $\lambda \ll \lambda_{\max}$  – genauer: für  $hc/(\lambda k_B T) \gg 1$  – gilt die *Wiensche Näherung*

$$B_\lambda(\lambda, T) \approx \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot e^{-hc/(\lambda k_B T)} \quad \text{für} \quad hc/(\lambda k_B T) \gg 1, \quad (1.46)$$

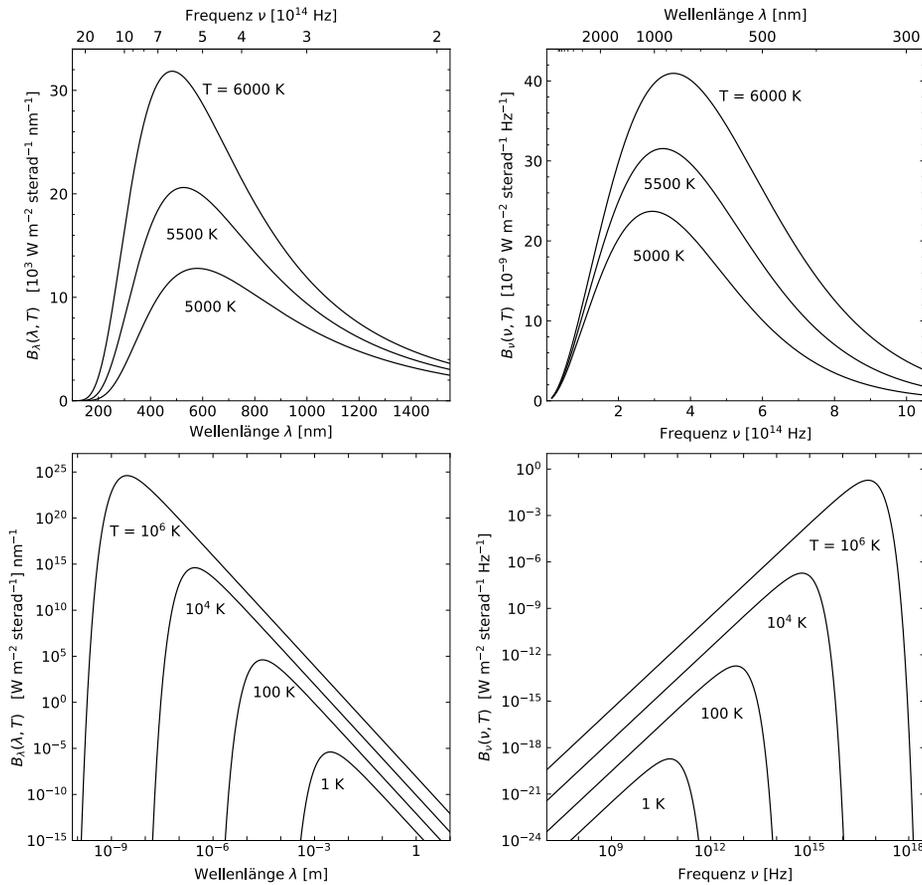
und im Grenzfall großer Wellenlängen gilt entsprechend die *Rayleigh-Jeans-Näherung*

$$B_\lambda(\lambda, T) \approx 2c k_B T \cdot \lambda^{-4} \quad \text{für} \quad hc/(\lambda k_B T) \ll 1 . \quad (1.47)$$

Das *Stefan-Boltzmann-Gesetz* gibt die gesamte über alle Wellenlängen und Ausstrahlungsrichtungen integrierte Strahlungsleistung pro Flächeneinheit der Oberfläche eines schwarzen Körpers an, also seine totale Flächenhelligkeit. Diese beträgt

$$F = \sigma_{\text{SB}} \cdot T^4, \quad (1.48)$$

<sup>3</sup> Im Einklang mit den internationalen Gepflogenheiten bevorzugen wir in diesem Buch die Begriffe „Schwarzer Körper“ und „Schwarzkörperstrahlung“ gegenüber dem traditionellen deutschen Terminus „Hohlraumstrahlung“.



**Abb. 1.6.** Spektrale Intensitätsverteilung der Schwarzkörperstrahlung in vier verschiedenen Darstellungen:  $B_\lambda(\lambda, T)$  (links) und  $B_\nu(\nu, T)$  (rechts) mit linearer (oben) und logarithmischer (unten) Achsenskalierung, für die jeweils angegebenen Werte der Temperatur  $T$ .

wobei  $\sigma_{\text{SB}}$  die aus mehreren Naturkonstanten zusammengesetzte „Stefan-Boltzmann-Konstante“ ist.

Die *Energiedichte*  $u$  des Strahlungsfeldes eines schwarzen Körpers, d.h. die Summe der Energien aller Photonen in einem Einheitsvolumen, erhält man durch Integration über alle Raumwinkel  $\Omega$ . Wegen der Ausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit  $c$  folgt für die spektrale Verteilung

$$u_\lambda = \frac{1}{c} \int B_\lambda(\lambda, T) d\Omega = \frac{4\pi}{c} B_\lambda(\lambda, T) \quad (1.49)$$

und für die gesamte Energiedichte

$$u = \frac{4\sigma_{\text{SB}}}{c} \cdot T^4 = a \cdot T^4 \quad (1.50)$$

mit der „Strahlungskonstanten“  $a = 4\sigma_{\text{SB}}/c$ .

Für festes  $\lambda$  hängt die Form von  $B_\lambda$  nur von  $T$  ab und steigt monoton mit  $T$ ; die gesamte (über alle  $\lambda$  integrierte) Abstrahlungsleistung steigt sogar mit  $T^4$ . In dieser Idealisierung hängt also weder die Form des Spektrums noch seine Intensität von der sonstigen Beschaffenheit des Körpers ab. In realen Körpern ist ein solches Verhalten desto genauer erfüllt, je besser die Annäherung an das thermische Gleichgewicht gegeben ist. Auf dieser Grundlage ist es z.B. möglich, allein aus der Lage des Strahlungsmaximums auf die ungefähre Temperatur eines Objekts zu schließen, oder aus der Temperatur die gesamte abgestrahlte Leistung abzuschätzen.

### 1.3.5 Dopplereffekt

Bewegt sich eine Strahlungsquelle relativ zum Beobachter (Empfänger), so ändert sich die Wellenlänge der empfangenen Strahlung. Dieser ursprünglich aus der Akustik bekannte *Doppler-Effekt* ermöglicht, dass wir Information über die Geschwindigkeit einer Lichtquelle relativ zu uns ermitteln können. Wenn sich die Strahlungsquelle mit einer Geschwindigkeit  $v_r$  relativ zu uns bewegt, beträgt die Verschiebung der gemessenen Wellenlänge  $\lambda$  gegenüber der im Labor bei ruhender Lichtquelle gemessenen Wellenlänge  $\lambda_0$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu_0 - \nu}{\nu} = \frac{v_r}{c}, \quad (1.51)$$

(in dieser Form nur für nicht-relativistische Geschwindigkeiten, also  $|v_r| \ll c$ , gültig). Wenn sich die Quelle von uns entfernt,  $v_r > 0$ , bedeutet dies also eine Verschiebung zu größeren Wellenlängen („Rotverschiebung“); wenn sie sich auf uns zubewegt,  $v_r < 0$ , ergibt sich eine Verschiebung zu kleineren Wellenlängen („Blauverschiebung“).

Die Doppler-Verschiebung kann an Spektrallinien, deren Laborwellenlänge  $\lambda_0$  man genau kennt, gemessen werden und ist die wichtigste, oft sogar die einzige Informationsquelle über die Bewegung weit entfernter astronomischer Objekte. Zusätzlich führt die mikroskopische Bewegung einzelner Teilchen (Atome oder Ionen) in einem Objekt dazu, dass nicht alle Photonen bei genau der gleichen Wellenlänge emittiert oder absorbiert werden. Es ergibt sich die *Doppler-Verbreiterung* der Spektrallinie gemäß der Verteilungsfunktion der Geschwindigkeiten  $v_r$  in radialer Richtung (s. Abschn. 1.3.8).

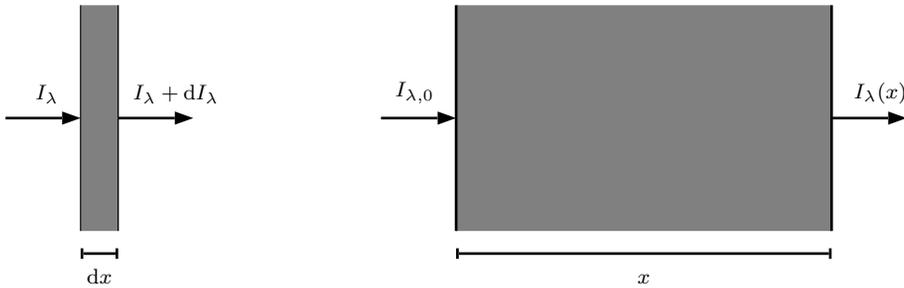
### 1.3.6 Absorption in Materie

Beim Durchgang von Strahlung durch eine infinitesimal dünne Materieschicht vermindert sich die Intensität  $I_\lambda$  durch Absorption um einen Betrag  $dI_\lambda$ ; dieser Betrag ist proportional zu der eingestrahnten Intensität und zur Schichtdicke  $dx$ :

$$dI_\lambda = -I_\lambda \cdot \kappa_\lambda \cdot dx \quad (1.52)$$

(vergl. Abb. 1.7 links). Der Proportionalitätsfaktor  $\kappa_\lambda$  heißt *Absorptionskoeffizient* und stellt eine Materialeigenschaft dar, die die Absorptionsfähigkeit der Materie für Strahlung der Wellenlänge  $\lambda$  beschreibt. Er hat die Dimension eines Wirkungsquerschnitts pro Volumeneinheit, ist also der Kehrwert einer Länge.  $\kappa_\lambda$  hängt nicht nur von der Wellenlänge ab, sondern auch von der chemischen Zusammensetzung der Materie, deren Ionisations- und Anregungsgrad sowie von der Materiedichte, also allgemein von der Temperatur  $T$ , dem Druck  $P$  und der Dichte  $\rho$ . Sein Wert muß für das jeweilige absorbierende Medium mit Hilfe der Quantenphysik berechnet werden.

Eine anschauliche Alternative zu der etwas abstrakten Größe Absorptionskoeffizient stellt das Konzept der *mittleren freien Weglänge*  $\ell$  für Photonen gegenüber Absorptionen



**Abb. 1.7.** Zur Intensitätsänderung der Strahlung bei Durchgang durch eine infinitesimal dünne (links) und eine endlich ausgedehnte (rechts) Materieschicht.

dar. Ein Photon der Energie  $hc/\lambda$  bewegt sich mit Lichtgeschwindigkeit auf einer geraden Linie, bis es ggf. absorbiert wird. Je höher der Absorptionskoeffizient, desto früher passiert die Absorption und desto kürzer wird entsprechend der zurückgelegte Weg. Die mittlere freie Weglänge  $\ell$  ist also

$$\ell_\lambda = \frac{1}{\kappa_\lambda}. \quad (1.53)$$

Die Abschwächung der Strahlungsintensität beim Durchgang durch eine endlich ausgedehnte Schicht der Dicke  $x$  (Abb. 1.7 rechts) ergibt sich dann aus

$$-\int \frac{dI_\lambda}{I_\lambda} = \int \kappa_\lambda dx \equiv \tau_\lambda. \quad (1.54)$$

Die in dieser Beziehung definierte dimensionslose *optische Tiefe*  $\tau$  gibt die Gesamt-Absorption, also die Transparenz einer Schicht entlang der Sichtlinie an. Eine Schicht mit  $\tau \ll 1$  ist quasi durchsichtig, die Intensität verringert sich nur wenig; man sagt, die Schicht ist „optisch dünn“. Dagegen ist eine Schicht mit  $\tau \gg 1$  nahezu lichtundurchlässig und heißt dementsprechend „optisch dick“. Da  $\tau_\lambda$  wie  $\kappa_\lambda$  von der Wellenlänge abhängt, kann eine Schicht durchaus bei einer Wellenlänge transparent, also optisch dünn sein, bei einer anderen Wellenlänge aber optisch dick.

Damit kann man Gl. (1.52) auch schreiben als  $dI_\lambda = -I_\lambda d\tau_\lambda$ , mit der Lösung

$$I_\lambda = I_{\lambda,0} \cdot e^{-\tau_\lambda}, \quad (1.55)$$

wobei die eingestrahlte Intensität  $I_{\lambda,0}$  als Randbedingung vorgegeben sein muss. Für eine hinreichend kleine optische Tiefe kann man annähern

$$I_\lambda \approx (1 - \tau_\lambda) I_{\lambda,0} \quad \text{für} \quad \tau_\lambda \ll 1. \quad (1.56)$$

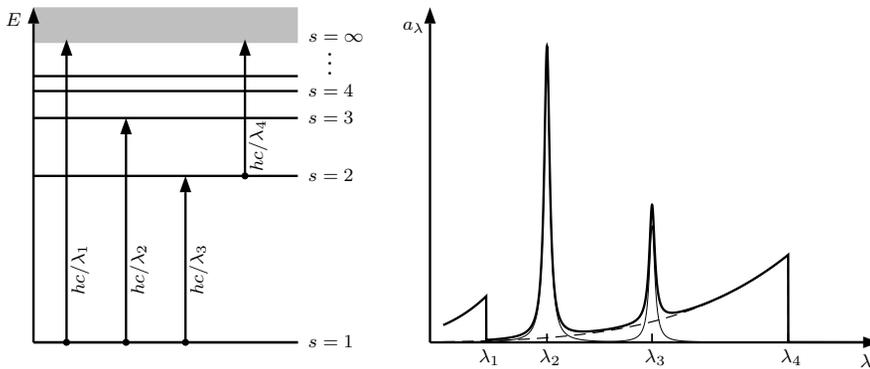
Umgekehrt gilt für eine sehr große optische Tiefe im Grenzfall offensichtlich

$$I_\lambda \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad \tau_\lambda \longrightarrow \infty. \quad (1.57)$$

unabhängig vom genauen Wert von  $I_{\lambda,0}$ .

Der dazwischen liegende Fall  $\tau = 1$  entspricht gemäß Gl. (1.55) einer Abschwächung der Intensität um genau einen Faktor  $1/e \approx 0.368$ .

Mikroskopisch hängt der Absorptionskoeffizient  $\kappa_\lambda$  von zweierlei ab: von den Wechselwirkungsraten der einzelnen Atome (bzw. Ionen bzw. Moleküle) mit Photonen, und von



**Abb. 1.8.** Links: Gebunden-gebunden- und gebunden-frei-Übergänge im Energieschema eines Atoms (schematisch). Rechts: Beiträge dieser Übergänge zum Absorptionsquerschnitt  $a_\lambda$ .

der Anzahldichte der wechselwirkenden Atome längs der Sichtlinie. Die Wahrscheinlichkeit einer einzelnen Wechselwirkung erfasst man mit dem *Absorptionsquerschnitt*  $a_\lambda$  pro absorbierendem Teilchen, ausgedrückt als Fläche. Mit der Anzahldichte  $n$  der relevanten Atome folgt dann der Absorptionskoeffizient als

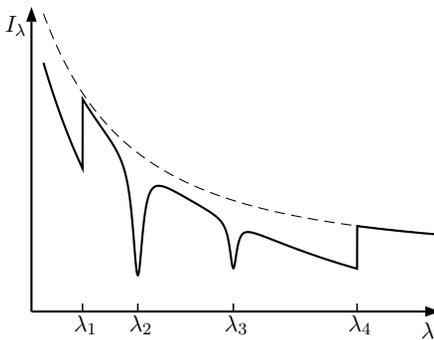
$$\kappa_\lambda = n \cdot a_\lambda. \quad (1.58)$$

Die *Absorptionsquerschnitte*  $a_\lambda$  aller in Frage kommenden Teilchen müssen durch Laborexperimente gemessen oder quantenmechanisch berechnet werden. In astrophysikalischen Gasen dominieren oftmals Wasserstoff und Helium die Teilchenzahlen pro Volumeneinheit, je nach Temperatur und Anregungsverhältnissen in Form von Atomen, Ionen oder (beim Wasserstoff) von  $\text{H}_2$ -Molekülen. Vom Zustand des Gases hängt auch ab, welche Wechselwirkungsprozesse zwischen Strahlung und Materie die größte Rolle spielen.

Frei-frei-Absorption hat keine charakteristische Wellenlänge und ergibt ein breites kontinuierliches Absorptionsspektrum. Bei gebunden-frei-Absorptionen zeigt die Funktion  $a_\lambda(\lambda)$  hingegen eine charakteristische Zackenform (s. Abb. 1.8), da Absorption nur für Photonen mit  $hc/\lambda > \chi_s$  möglich ist ( $\chi_s$  ist die Ionisationsenergie für das Anregungsniveau  $s$ ):  $a_\lambda$  ist 0 für  $\lambda > hc/\chi_s$ , springt dann diskontinuierlich auf einen Maximalwert bei  $\lambda = hc/\chi_s$  und fällt zu kleineren Wellenlängen wieder ab.

Gebunden-gebundene Absorption impliziert den Transfer eines Elektrons von einem diskreten Energieniveau auf ein höheres, entspricht also im Prinzip einem Wert  $a_\lambda > 0$  bei einer einzigen Wellenlänge  $\lambda_{1,2} = hc/\Delta E$ . Aufgrund der natürlichen Unschärfe der quantenmechanischen Energieniveaus sowie weiterer Mechanismen (s. Abschn. 1.3.8) ist  $a_\lambda(\lambda)$  allerdings „verbreitert“ und darstellbar als glatte Funktion mit einem Maximum bei  $\lambda_{1,2}$  und mehr oder weniger ausgeprägten Flügeln zu beiden Seiten wie in Abb. 1.8 exemplarisch für zwei Übergänge dargestellt.

Wenn der Absorptionsquerschnitt  $a_\lambda$  und die relevante Teilchendichte  $n$  beide bekannt sind, kann nach Gl. (1.58) der Absorptionskoeffizient ermittelt werden. In Abb. 1.9 ist ein daraus resultierendes Absorptionsspektrum skizziert, das sowohl diskrete Spektrallinien als auch Absorptionskanten enthält. Um solche Spektren tatsächlich berechnen zu können, sind allerdings weitere (in der Regel situationspezifische) Annahmen erforderlich.



**Abb. 1.9.** Schematisches Absorptionsspektrum einer Schicht mit einem Verlauf des Absorptionskoeffizienten wie in Abb. 1.8. Das unabsorbierte Kontinuum ist durch die gestrichelte Linie angedeutet.

### 1.3.7 Strahlungstransport

Allgemein muss man davon ausgehen, dass das Material die absorbierte Strahlungsenergie wieder emittiert, entweder bei der gleichen Wellenlänge  $\lambda$  oder auch nach internen Umwandlungsprozessen bei anderen Photonenenergien. Jede Emission führt aber wiederum zu einer Erhöhung der Intensität. Diese Intensitätszunahme für eine Schicht der Dicke  $dx$  schreiben wir als

$$dI_\lambda = \varepsilon_\lambda \cdot dx, \quad (1.59)$$

womit analog zum Absorptions- nun der *Emissionskoeffizient*  $\varepsilon_\lambda$  definiert wurde. Auch diese Größe ist in komplizierter Weise von Druck, Dichte, Temperatur und der chemischen Zusammensetzung abhängig und muß ebenfalls quantenmechanisch berechnet werden.

Die gesamte Änderung  $dI_\lambda$  der Intensität  $I_\lambda$  setzt sich additiv aus den Anteilen der Absorption und der Emission zusammen, nämlich nach Gl. (1.52) und (1.59):

$$dI_\lambda = -I_\lambda \cdot \kappa_\lambda dx + \varepsilon_\lambda dx, \quad (1.60)$$

woraus sich die allgemeine Differentialgleichung für den Strahlungstransport ergibt:

$$\frac{dI_\lambda}{dx} = -I_\lambda \cdot \kappa_\lambda + \varepsilon_\lambda. \quad (1.61)$$

Substituiert man  $\kappa_\lambda dx$  durch  $d\tau_\lambda$ , so resultiert die häufig gewählte alternative Schreibweise

$$\frac{dI_\lambda}{d\tau_\lambda} = -I_\lambda + \frac{\varepsilon_\lambda}{\kappa_\lambda}. \quad (1.62)$$

Diese Gleichung ist für eine Vielzahl astrophysikalischer Problemstellungen von großer Bedeutung. Im konkreten Anwendungsfall sind dabei sowohl die Funktionen  $\varepsilon_\lambda$  und  $\kappa_\lambda$  (bzw. ihr Verhältnis) als auch die geometrischen Randbedingungen zu spezifizieren. Die Schwierigkeit einer genauen Berechnung des Strahlungstransports rührt vor allem aus der Tatsache her, dass durch allerhand Prozesse Strahlungsenergie zwischen verschiedenen Frequenzen hin- und hergeschoben werden kann. In der Regel kann die Strahlungstransportgleichung nur durch aufwendige numerische Integration gelöst werden; geschlossene Lösungen sind nur in wenigen Sonderfällen möglich. Einen besonders einfachen Fall stellt die Lösung für reine Absorption in Gl. (1.55) dar.

Im idealisierten thermischen Gleichgewicht ist die Temperatur örtlich und zeitlich konstant, und die energetischen Beträge von Absorption und Emission halten sich die Waage. Unter solchen Umständen gilt der *Kirchhoffsche Satz*, wonach Absorptions- und Emissionskoeffizient durch

$$\frac{\varepsilon_\lambda}{\kappa_\lambda} = B_\lambda(\lambda, T), \quad (1.63)$$

miteinander verknüpft sind, mit  $B_\lambda(\lambda, T)$  als Planck-Funktion (Gl. 1.43). Wenn der Absorptionskoeffizient  $\kappa_\lambda$  bekannt ist, folgt daraus im thermodynamischen Gleichgewicht, dass die absorbierte Energie wie von einem schwarzen Körper gemäß  $\varepsilon_\lambda = B_\lambda(\lambda, T) \cdot \kappa_\lambda$  wieder abgestrahlt wird. Für diesen Fall kann man die formale Lösung der Strahlungstransportgleichung (1.62) hinschreiben,

$$I_\lambda = I_{\lambda,0} \cdot e^{-\tau_\lambda^*} + \int B_\lambda(\lambda, T) e^{-\tau_\lambda} d\tau_\lambda, \quad (1.64)$$

wobei das Integral über die gesamte Sehstrecke durch das Medium zu bilden ist und  $\tau_\lambda^*$  die gesamte optische Tiefe des Mediums angibt,  $\tau_\lambda^* = \int d\tau_\lambda$ . In Abschn. 5.2.2 behandeln wir die Bedeutung dieser Gleichung für das Zustandekommen von Absorptionslinien im Sonnenspektrum.

### 1.3.8 Verbreiterung von Spektrallinien

Alle Spektrallinien, ob in Absorption oder Emission, sind immer über einen gewissen Bereich um die zentrale Wellenlänge „verschmiert“, was dann in einer endliche Breite der Linie resultiert. Es gibt drei hauptsächliche physikalische Mechanismen für diese *Linienverbreiterung*:

Die *natürliche Linienbreite*  $\delta\lambda$  ist gegeben durch die Breite der Energieniveaus  $\delta E$ , die wiederum durch die quantenmechanische Unschärferelation begrenzt ist. Diese besagt, dass jeder angeregte Zustand nur eine begrenzte (statistische) „Lebensdauer“  $\delta t$  hat, nach der er sich spontan wieder abregt; dann ist  $\delta E \cdot \delta t \geq h/(2\pi)$ , also  $\delta\lambda \geq \lambda^2/(2\pi c \delta t)$ . Im Wellenbild des Lichtes entspricht dieser Zusammenhang der Aussage, dass einzelne Wellenzüge eine endliche Länge haben („gedämpft“) sind; aus der Fourieranalyse wissen wir, dass zur Darstellung einer solchen Dämpfung die Überlagerung vieler benachbarter Frequenzen nötig ist. Nur unendlich lange („ungedämpfte“) Wellenzüge können strikt monochromatisch sein. Die natürliche Linienverbreiterung wird daher auch als *Strahlungsdämpfung* bezeichnet.

Eine *Stoßverbreiterung* der Linie resultiert aus inelastischen Wechselwirkungen („Stößen“) mit benachbarten Teilchen. Dabei kann Energie übertragen und ein angeregtes Niveau vorzeitig wieder abgeregt werden. Wenn solche Stöße hinreichend häufig passieren, bewirken sie eine erhebliche Verkürzung der Lebensdauer  $\delta t$  der angeregten Niveaus, was zu einer entsprechenden Verbreiterung  $\delta E$  der Energieniveaus führt. Da dieser Effekt mit wachsender Anzahl sich störender Teilchen steigt, also mit wachsendem Druck, heißt er auch *Druckdämpfung*.

Zusätzlich kommt eine *thermische Linienverbreiterung* hinzu, wenn die absorbierenden Teilchen wegen ihrer statistischen Bewegungen sowohl positive und negative Radialgeschwindigkeiten  $v$  relativ zur Strahlungsquelle haben, was aufgrund des Dopplereffekts jeweils Verschiebungen der Wellenlänge um  $\Delta\lambda/\lambda = v/c$  ergibt. In dem häufigen Fall

des thermodynamischen oder zumindest kinetischen Gleichgewichts gilt, dass die Geschwindigkeiten längs der Sichtlinie und somit auch die Wellenlängenverschiebungen einer Gaußschen Normalverteilung folgen (eindimensionale Form der Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung, s. Abschn. 1.2.2). Gemäß Gl. (1.31) ist die Breite  $\sigma_\lambda$  dieser Verteilung proportional zu  $\sqrt{T}$ .

In einigen Situationen kommen noch weitere Gründe für eine Verbreiterung von Spektrallinien hinzu. So spalten sich atomare Niveaus in einem starken elektrischen oder in einem Magnetfeld in mehrere Komponenten auf (*Stark-* bzw. *Zeeman-Effekt*), was zu einer entsprechenden Aufspaltung der zugehörigen Linien führt. Ist die Aufspaltung allerdings kleiner als die Breite der individuellen Linienkomponenten, so sind diese jedoch nicht als Einzelkomponenten zu erkennen, sondern bewirken nur eine Verbreiterung der gesamten Linie.

### 1.3.9 Anregungs- und Ionisationsstufen

Eine für viele Situation grundlegende Größe ist die jeweilige Anzahldichte der Atome (bzw. Ionen) auf verschiedenen Energieniveaus. Diese variiert – außer mit der Häufigkeit des betreffenden Elementes – mit den jeweils herrschenden Anregungs- und Ionisationsbedingungen. Falls sich beispielsweise alle H-Atome im Grundzustand befinden, können offensichtlich keine Absorptionslinien entstehen, die einem Übergang vom zweiten zu höheren Niveaus entsprechen (dies ist in guter Näherung im interstellaren Medium der Fall, s. Abschn. 9.2.1).

Für den idealisierten Fall des thermodynamischen Gleichgewichts hängen sowohl die Verteilung der Anregungs- als auch die der Ionisationsstufen nur von der Temperatur ab und lassen sich durch statistische Verteilungsfunktionen beschreiben (s. Abschn. 1.2.2). Der *Anregungsgrad* eines beliebigen Elements, d.h. die Anzahldichte  $n_s$  der Teilchen auf dem atomaren Energieniveau  $E_s$  relativ zur Dichte  $n_1$  der Teilchen im Grundzustand  $E_1$  folgt dann einer *Boltzmann-Verteilung*,

$$\frac{n_s}{n_1} = \frac{g_s}{g_1} \cdot e^{-E_s/k_B T}, \quad (1.65)$$

wobei  $g_1, g_s$  die statistischen Gewichte der jeweiligen Niveaus darstellen. Über den Exponentialfaktor nimmt der Anregungsgrad mit wachsender Temperatur  $T$  stark zu. Bei geringerer Temperatur sind dagegen nur Niveaus mit niedriger Anregungsenergie merklich besetzt.

Analog definieren wir den *Ionisationsgrad*: Von einem bestimmten Element seien  $n_r$  Teilchen  $r$ -fach,  $n_{r+1}$  Teilchen seien  $(r + 1)$ -fach ionisiert, d.h. jedes von ihnen hat  $r$  bzw.  $(r + 1)$  Elektronen verloren. Die Zahl der freien, nicht an Atome gebundenen Elektronen sei  $n_e$ . Die Größen  $n_r, n_{r+1}$  und  $n_e$  sind wieder Teilchenzahlen pro Volumeneinheit. Dann ist der Ionisationsgrad im thermodynamischen Gleichgewicht bei der Temperatur  $T$  gegeben durch die *Saha-Formel*

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} = \frac{1}{n_e} \cdot 2 \frac{u_{r+1}}{u_r} \cdot \frac{(2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{h^3} \cdot e^{-\chi_r/k_B T}. \quad (1.66)$$

Hier ist  $\chi_r$  die jeweilige *Ionisationsenergie* und  $u_r, u_{r+1}$  sind die „Zustandssummen“, die sich aus der Kombination der statistischen Gewichte der Einzelniveaus ergeben. Bei einem Element mit bestimmten  $\chi_r$  steigt also der Ionisationsgrad mit  $T$  und nimmt mit  $n_e$  ab. Bei fester Temperatur und fester Elektronendichte dagegen sinkt der Ionisationsgrad, wenn man zu Elementen mit steigender Ionisationsenergie übergeht.

Die Bedeutung dieser beiden Gleichungen für die Astrophysik ist immens. Zwar sind reale Systeme nie wirklich in perfektem thermodynamischem Gleichgewicht, aber sehr oft kann dies näherungsweise zumindest in Teilaspekten angesetzt werden. Gl. (1.65) und (1.66) geben dann Auskunft über die relativen Häufigkeiten derjenigen Teilchen, die zu der beobachteten Strahlung astronomischer Objekte beitragen. Insbesondere basiert die physikalische Interpretation von Sternspektren fundamental auf Saha- und Boltzmann-Gleichung (s. Abschn. 6.2.2).

### 1.3.10 Synchrotronstrahlung

Im Prinzip strahlt jedes elektrisch geladene Teilchen in beschleunigter Bewegung dabei Energie ab. Astrophysikalisch wichtig sind vor allem freie Elektronen, die sich mit relativistischen Geschwindigkeiten  $v \lesssim c$  in Magnetfeldern bewegen – ähnlich der Situation in einem irdischen Teilchenbeschleuniger, daher der Name „Synchrotronstrahlung“. Derartige Vorgänge findet man z.B. im interstellaren Medium in Supernova-Überresten, aber auch in der Nähe sehr kompakter Objekte wie Neutronensterne und Schwarzer Löcher.

Auf ein Elektron mit der Ladung  $e$  und der Masse  $m$ , das sich mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  in einem Magnetfeld der Stärke  $\mathbf{B}$  bewegt, wirkt die Lorentzkraft

$$\mathbf{F} = e \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (1.67)$$

Durch die Lorentzkraft wird das Elektron also immer senkrecht zu  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{B}$  beschleunigt. Steht der Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  senkrecht auf  $\mathbf{B}$ , so ergibt sich eine Kreisbahn um die Feldlinien, andernfalls eine Spiralbahn. Die Bewegung erfolgt auf einem Kreis mit Radius  $r_L$ , dem *Larmorradius*, mit der charakteristischen *Larmorfrequenz*  $\omega_L$ . Die Werte dieser Größen folgen aus der Bedingung, dass die Beträge von Fliehkraft  $m v_{\perp} \omega$  und Lorentzkraft  $e v_{\perp} B$  gleich sein müssen, wobei  $v_{\perp}$  die zum Feld senkrechte Geschwindigkeitskomponente darstellt:

$$\omega_L = \frac{eB}{m}, \quad r_L = \frac{v}{\omega_L} = \frac{v_{\perp} m}{eB}. \quad (1.68)$$

Bei dieser beschleunigten Bewegung wandelt das Elektron die dem Magnetfeld entnommene Energie in Synchrotronstrahlung um. Der Charakter der Strahlung hängt sehr stark von der Geschwindigkeit ab, mit der sich das Elektron bewegt. Bei  $v \ll c$  strahlt das Elektron in alle Vorwärtsrichtungen ab, und die Abstrahlung ist im Prinzip monochromatisch mit der Larmorfrequenz,  $\nu = \omega_L/2\pi$ , also nur von der Stärke des Magnetfeldes abhängig. Bei relativistischer Bewegung  $v \rightarrow c$  ist die Strahlung jedoch in einen sehr schmalen Kegel in Bewegungsrichtung gebündelt, dessen Öffnungswinkel  $\theta \approx 1/\gamma$  beträgt, wobei  $\gamma = (1 - (v/c)^2)^{-1/2}$  der „Lorentzfaktor“ ist. Für einen ortsfesten Beobachter erzeugt jedes Elektron daher nur einen sehr kurzen Lichtblitz der Zeitdauer  $\Delta t \sim (\omega_L \gamma)^{-1}$ . Die spektrale Energieverteilung jedes dieser Lichtblitze entspricht einem kontinuierlichen Spektrum mit der Maximalfrequenz bei

$$\nu_{\max} = 0.3 \frac{3}{4\pi} \frac{eB}{m_e} \gamma^2. \quad (1.69)$$

Je größer der Lorentzfaktor  $\gamma$ , desto kürzer sind die Lichtblitze, desto breiter ist das abgestrahlte Spektrum, und desto höher ist die abgestrahlte Frequenz.

In der Realität sind natürlich niemals die Lichtblitze einzelner Elektronen zu beobachten, sondern nur die integrierte Abstrahlung eines ganzen Ensembles von Elektronen. Es lässt sich zeigen, dass bei einer Verteilung der kinetischen Energien  $E_e$  über das Ensemble

der Elektronen in Form eines Potenzgesetzes,  $dN_e/dE_e \propto E_e^\beta$ , mit  $\beta$  als freiem Parameter, auch das abgestrahlte Synchrotron-Spektrum die Form eines Potenzgesetzes hat,

$$I_\nu = I_{\nu_0} \cdot \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^\alpha \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{\beta - 1}{2}. \quad (1.70)$$

### 1.3.11 Kosmische Strahlung

Die äußeren Zonen der Erdatmosphäre werden permanent durch hochenergetische Teilchen bombardiert. Ein Großteil dieser Teilchen erreicht dabei nicht den Erdboden, da die atmosphärische Absorption und Ablenkung durch die Erdmagnetosphäre einen sehr effektiven Schutz darstellen. Als Sammelbegriff wird dieser aus allen Richtungen eindringende Teilchenstrom als *kosmische Strahlung* bezeichnet. Sie setzt sich zusammen aus leichten Atomkernen – vor allem Protonen und Heliumkerne ( $\alpha$ -Teilchen) – sowie aus freien Elektronen ( $\beta$ -Strahlung); mitunter werden auch hochenergetische Photonen ( $\gamma$ -Strahlung) dazu gezählt.

Ein Charakteristikum der kosmischen Strahlung ist ihre breite Abdeckung des Energiespektrums. Es werden kinetische Teilchen- bzw. Photonenergien von mehr als  $10^{20}$  eV erreicht, etliche Größenordnungen oberhalb der nach  $E = mc^2$  umgerechneten Ruhemassen (und weit über dem, was in den leistungsfähigsten irdischen Teilchenbeschleunigern erreicht werden kann). Entsprechend besitzen die materiellen Teilchen der hochenergetischen kosmischen Strahlung Geschwindigkeiten sehr nahe an der Lichtgeschwindigkeit. Das Energiespektrum der kosmischen Strahlung folgt ganz grob einem Potenzgesetz (Gl. 1.70) mit dem Exponenten  $\beta \simeq -1$ , wobei Abweichungen von diesem Potenzgesetz in bestimmten Energiebereichen Hinweise auf die unterschiedlichen Erzeugungsmechanismen geben.

Die Ursprünge der kosmischen Strahlung, insbesondere der Komponenten mit den höchsten Energien, ist seit langem ein Gegenstand intensiver Forschung. Abgesehen von der Sonne sind wesentliche Quellen die Überreste von Supernovaexplosionen (s. Abschn. 7.3.3), Pulsare (s. Abschn. 7.3.4) sowie relativistische Ausflüsse (*Jets*) bei der Akkretion auf Neutronensterne und Schwarze Löcher (s. Abschn. 7.3.5), insbesondere in massereichen Schwarzen Löchern in Galaxienkernen (11.5.3).

### 1.3.12 Gravitationswellen

Eine der Konsequenzen aus der allgemeinen Relativitätstheorie ist die Tatsache, dass eine beschleunigte Masse Energie (sowie auch Impuls und Drehimpuls) an den sie umgebenden Raum verliert. Diesen Verlust kann man als eine lokale transversale „Verkrümmung“ des Raumes beschreiben, die sich periodisch wiederholt und mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet – eine Gravitationswelle. Die Existenz von Gravitationswellen wird seit der Entdeckung von Mehrfachpulsaren, deren Bahnachsen sich im Laufe der Zeit verkleinern (Abschn. 7.4.4) als bewiesen angesehen, aber der direkte Nachweis durch ein Gravitationswelleninterferometer (s. Abschn. 2.5.3) gelang erst 2015.

Gravitationswellen sind kein elektromagnetisches Phänomen und fallen daher eigentlich nicht unter den Begriff „Strahlung“. Sie stellen aber eine der Strahlung ähnliche Informationsquelle über Vorgänge im Kosmos dar, wobei mit derzeitigen Detektoren nur einige der allerstärksten Gravitationswellenereignisse beobachtbar sind. Ein Großteil des Potentials der „Gravitationswellenastronomie“ wird wohl erst in mehr oder weniger ferner Zukunft genutzt werden können.

Die Schwingungsfrequenzen bzw. -wellenlängen von Gravitationswellen (auch hier gilt wieder Gl. 1.36) weisen auf die sehr unterschiedliche Erzeugungsmechanismen hin. Derzeit nachweisbar sind nur Frequenzen im Bereich von einigen Hz bis zu etwa 100 kHz, entsprechend Wellenlängen von  $\lambda \gtrsim 10$  km, die ausschließlich unmittelbar vor der Verschmelzung zweier hochrelativistischer kompakter Körper von wenigen bis zu einigen -zig Sonnenmassen (Neutronensterne, stellare Schwarze Löcher) abgegeben werden. Die Frequenz  $\nu$  der Gravitationswelle beträgt das Doppelte der Umlauffrequenz der beiden Körper, also  $\nu = 2/U$ . Durch den Energieverlust aufgrund der Abstrahlung von Gravitationswellen verkürzt sich die Umlaufzeit  $U$  immer mehr, d.h. die Frequenz des abgestrahlten Gravitationswellensignal steigt an. Es kommt zu einer charakteristischen Modulation, als „Zwitschern“ (engl. *chirp*) bezeichnet, die mit dem eigentlichen Verschmelzungsereignis abrupt endet. Die Zeitdauer des messbaren Signals liegt dabei im Bereich weniger Sekunden oder sogar nur Sekundenbruchteile.

Je größer die beteiligten Massen sind, desto größer sind die Umlaufzeiten und entsprechend kleiner die Frequenzen. Bei der Verschmelzung zweier massereicher Schwarzer Löcher von etwa  $10^6$ – $10^9 M_{\odot}$  entstehen Gravitationswellen im Bereich von mHz bis  $\mu$ Hz, deren Nachweis mit einem weltraumgestützten Interferometer möglich sein sollte. Noch geringere Frequenzen sind dann voraussichtlich nur noch indirekt nachweisbar, und zwar über die Auswirkung der Gravitationswellen auf die beobachtbaren elektromagnetischen Signal, das wir von anderen Himmelsobjekten empfangen. Zu den aussichtsreichsten Möglichkeiten für solche Beobachtungen gehören winzige Variationen in der ansonsten strikten Periodizität in den Radiosignalen von Pulsaren aufgrund von Zeitdilatationseffekten beim Durchlaufen der Gravitationswelle.